Examen d'analyse de base 1 :

Durée : 2h

Exercice 1 :

Étudier la suite $(u_n)_n$ définie par :

$$u_0 \in \mathbb{R} \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \exp(u_n) - 1.$$

Exercice 2 :

1. (a) Montrer que sh est une bijection d'une partie de $\mathbb{R}$ dans une autre partie de $\mathbb{R}$, on note f sa bijection réciproque.
   (b) Montrer que ch induit une bijection d'une partie de $\mathbb{R}$ dans une autre partie de $\mathbb{R}$, on note g sa bijection réciproque.
2. (a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$: $ch(f(x)) = \sqrt{x^2+1}$.
   (b) Montrer que pour tout $x \in [1, +\infty[$: $sh(g(x)) = \sqrt{x^2-1}$.
3. (a) Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et donner une expression de sa dérivée.
   (b) Justifier que g est dérivable sur $]1, +\infty[$ et donner une expression de sa dérivée.
4. (a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$.
   (b) Montrer que pour tout $x \in [1, +\infty[$: $g(x) = \ln(x + \sqrt{x^2-1})$.

Exercice 3 :

On appelle suite de Cauchy toute suite réelle (u_n) telle que :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N}\ /\ \forall p \geq N,\ \forall q \geq N,\ |\, u_p - u_q \,| < \varepsilon.$$

1. Montrer que toute suite de Cauchy est bornée.
2. (a) Montrer que toute suite convergente est de Cauchy.
   (b) Réciproquement, montrer que toute suite de Cauchy est convergente en utilisant le Théorème de Bolzano-Weierstrass.
3. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a \leq b$ et $f : [a, b] \to [a, b]$ une fonction contractante, i.e. telle que :
$$\exists c \in [0, 1[\ /\ \forall x, y \in [a, b],\ |\, f(x) - f(y) \,| \leq c \,|\, x - y \,|.$$
On souhaite montrer que f possède alors un et un seul point fixe.
   (a) Montrer l'unicité d'un tel point fixe.
   (b) Montrer que f est continue sur $[a, b]$.
   Soit $\omega \in [a, b]$ fixé. On note (u_n) la suite définit par : $u_0 = \omega$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$$u_{n+1} = f(u_n).$$
   (c) Etablir que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|\, u_{n+1} - u_n \,| \leq c^n \,|\, u_1 - u_0 \,|$. Grâce à une simplification télescopique, en déduire que pour tous $p, q \in \mathbb{N}$, $p \geq q$:
$$|\, u_p - u_q \,| \leq c^q \frac{|\, u_1 - u_0 \,|}{1 - c}.$$
   (d) En déduire que la suite (u_n) est de Cauchy.
   (e) En déduire que f possède un point fixe.

Bonne chance