Contrôle d'Analyse

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les candidats sont invités à encadrer, dans la mesure du possible, les résultats de leurs calculs. Ils ne doivent faire usage d'aucun document.

Partie I : Cours

A -

1. Écrire en termes de quantificateurs le fait qu'une suite $(u_n)_n$ est de Cauchy.
2. Écrire sa négation.
3. Prouver que la suite $(H_n)_n$ définie par $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$ n'est pas convergente.

B -

1. Prouver que la fonction ch réalise une bijection continue de $[0; +\infty[$ sur $[1; +\infty[$.
2. Prouver que sa fonction réciproque Argch est une bijection dérivable sur $]1; +\infty[$ et calculer $(\text{Argch})'$.

C -

1. Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^∞. Écrire la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre n et en préciser les hypothèses.
2. Prouver que la fonction $x \to e^x$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et écrire son développement de Taylor.
3. Prouver que $e^x = \lim\limits_{n\to+\infty} 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}, \forall x \in \mathbb{R}$.
4. Prouver que la fonction $x \to exp(\alpha log(x))$ ($\alpha \in \mathbb{R}$ fixé), est de classe C^∞ sur $]0; +\infty[$ et calculer sa dérivée d'ordre n.

D -

Soit A la partie de $\mathbb{R}$ donnée par $A = \{1 + \frac{1}{n+1} / n \in \mathbb{N}\}$.

1. Déterminer $\mathring{A}$.
2. Déterminer l'ensemble des points isolés de A.
3. Démontrer que 1 est un point adhérent à A et en déduire que 1 est un point d'accumulation de A.

Partie II :

Exercice 1

On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(t) = \begin{cases} e^{1/t} & \text{si } t < 0 \\ 0 & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$$

1. Démontrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$, en particulier en $t = 0$.
2. Etudier l'existence de $f''(0)$.
3. On veut montrer que pour $t < 0$, la dérivée n-ième de f s'écrit

$$f^{(n)}(t) = \frac{P_n(t)}{t^{2n}} e^{1/t}$$

   où P_n est un polynôme.
   (a) Trouver P_1 et P_2.
   (b) Trouver une relation de récurrence entre P_{n+1}, P_n et P'_n pour $n \in \mathbb{R}^*$.
4. Montrer que f est de classe C^∞.

Exercice 2

Une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est dite höldérienne d'exposant $\alpha > 0$ s'il existe $M \in \mathbb{R}^+$ vérifiant

$$\forall x, y \in I, |f(y) - f(x)| \leqslant M\,|y - x|^\alpha$$

1. Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ de classe C^1.
   Montrer que f est höldérienne d'exposant $\alpha = 1$.

2. Démontrer que les fonctions höldériennes d'exposant > 1 sont constantes.

3. On considère la fonction $f : x \mapsto x \ln x$ définie sur $]0, 1]$.
   Montrer que la fonction f n'est pas höldérienne d'exposant 1.

4. Vérifier cependant que f est höldérienne d'exposant α pour tout $\alpha \in]0, 1[$.

Exercice 3

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x - x^2$, et (u_n) la suite définie par $u_0 \in]0, 1[$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Etudier les variations de f.
2. Montrer que, pour tout n, $0 < u_n < \frac{1}{n+1}$.
3. En déduire que la suite (v_n) définie par $v_n = nu_n$, $n \geq 0$, est croissante.
4. Montrer que la suite (v_n) admet une limite l appartenant à $]0, 1]$ (on ne demande pas de calculer l pour le moment).
5. On pose $w_n = n(v_{n+1} - v_n)$. Montrer que (w_n) converge vers $l(1 - l)$.
6. Soit (t_n) une autre suite telle qu'il existe $n_0 \geq 1$ vérifiant que, pour $n \geq n_0$, on a

$$t_{n+1} - t_n \geq \frac{a}{n},$$

   où $a > 0$. Montrer que $t_{2n} - t_n \geq \frac{a}{2}$ pour $n \geq n_0$, puis que (t_n) est divergente.
7. Montrer que si $l \neq 1$, la suite (v_n) vérifie les mêmes conditions que la suite (t_n) de la question précédente. En déduire la valeur de l.

Examen d'Analyse 1

La rédaction, la clarté et la précision dans les raisonnements constitueront des éléments importants dans l'évaluation des copies. Tout échange de matériel de quelque nature que ce soit est interdit. Bon courage.

Exercice 1 *Etudier la courbe d'équation polaire* $r(\theta) = tan(\frac{2\theta}{3})$.

Exercice 2 *Soit* f *la fonction définie sur* $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ *par* $f(x) = 2\tan x - x$.

1. *Montrer que* f *admet une fonction réciproque de classe* C^∞.
2. *Justifier que* f^{-1} *est impaire.*
3. *Donner le développement limité de* f^{-1} *á l'ordre 6 en 0. On rappelle que* $\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o(x^6)$.

Exercice 3 *Soit* f *la fonction définie sur* $\mathbb{R}^*$ *par* $f(x) = x\sinh\left(\frac{1}{x}\right)$.

1. *Montrer que pour tout* $x > 0$, *on a* $\tanh(x) < x$.
2. *En déduire le tableau de variations de* f. *On précisera les limites aux bornes.*
3. *Donner le développement limité à l'ordre 2 en 0 de* $u \mapsto \frac{\sinh u}{u}$.
4. *En déduire que* f *admet au voisinage de* $+\infty$ *un développement asymptotique de la forme*
$$f(x) = a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right),$$
où a_0, a_1, a_2 *sont des réels que l'on précisera.*
5. *Montrer que pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$, *l'équation* $f(x) = \frac{n+1}{n}$ *admet une unique solution* $u_n > 0$.
6. *Montrer que la suite* (u_n) *est croissante.*
7. *Montrer que la suite* (u_n) *tend vers* $+\infty$ *en* $+\infty$.
8. *Déterminer un équivalent de* (u_n) *quand* n *tend vers* $+\infty$.

Problème

Partie I : Etude de la fonction réciproque de la fonction tanh.

On notera respectivement cosh, sinh et tanh les fonctions cosinus hyperbolique, sinus hyperbolique et tangente hyperbolique définies par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad \text{et} \quad \tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}.$$

1. Montrer, en étudiant ses variations, que tanh est une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ à préciser.
   On note *artanh* sa réciproque.
2. Exprimer la dérivée de tanh en fonction de tanh.
3. Démontrer que *artanh* est impaire.
4. Démontrer que *artanh* est dérivable sur I et calculer sa dérivée.
5. Exprimer *artanh* à l'aide de fonctions usuelles.
6. Déterminer un développement limité à l'ordre 5 de *artanh* en 0.

Partie III : Etude d'une équation fonctionnelle

Le but de cette partie est de résoudre le problème suivant :
déterminer les fonctions f définies sur $\mathbb{R}$, à valeurs réelles et dérivables en 0 qui vérifient :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(2x) = \frac{2f(x)}{1+(f(x))^2}$$

8. Déterminer les fonctions constantes solutions du problème posé.
9. Déterminer les valeurs possibles de $f(0)$ si f est solution.
10. Montrer que, si f est solution, on a $\forall x \in \mathbb{R},\ -1 \leqslant f(x) \leqslant 1$. (on pourra exprimer $f(x)$ en fonction de $f\left(\frac{x}{2}\right)$.)
11. Montrer que si f est solution, $-f$ est aussi solution.
13. Montrer que tanh est solution du problème posé.

   Dans les questions **13.** à **17.**, on suppose que f **est une solution du problème posé, que** $f(0) = 1$ **et que** f **n'est pas constante.**

   On considère $x_0 \in \mathbb{R}$, tel que $f(x_0) \neq f(0)$ et l'on définit la suite (u_n) par :
   $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = f\left(\frac{x_0}{2^n}\right)$.
14. Montrer que la suite (u_n) est convergente et préciser sa limite.
15. Etablir une relation entre u_n et u_{n+1} ; en déduire que la suite (u_n) garde un signe constant, puis étudier sa monotonie suivant le signe de u_0.
16. En utilisant les résultats des questions **13.** et **14.**, aboutir à une contradiction.
17. Que peut-on dire si l'hypothèse $f(0) = 1$ est remplacée par l'hypothèse $f(0) = -1$?
18. Conclusion ?

   Dans les questions **18.** à **22.**, on suppose que f **est une solution du problème posé et que** $f(0) = 0$.
19. En raisonnant par l'absurde et en considérant une suite du même type que celle des questions **13.** à **17.**, montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) \neq -1 \quad \text{et} \quad f(x) \neq +1.$$

   On définit alors la fonction g par : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = artanh(f(x))$.
20. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R},\ g(2x) = 2\,g(x)$.
21. Montrer que g est dérivable en zéro.
22. Soit $x \in \mathbb{R}^{\times}$; on définit la suite (v_n) par : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = \dfrac{f\left(\frac{x}{2^n}\right)}{\frac{x}{2^n}}$.

   Montrer que (v_n) est convergente et déterminer sa limite.
23. En déduire que g est linéaire.
24. Déterminer toutes les fonctions solutions du problème posé.