Université Ibn Tofail
Ecole Nationale des Sciences Appliquées
Kénitra, Maroc

Mathématiques, Algèbre 1, 2011-2012

Cycle préparatoire

Série $n°$: 4

Exercice 1
Effectuer la division de $A = X^6 - 2X^4 + X^3 + 1$ par $B = X^3 + X^2 + 1$:
1. Suivant les puissances décroissantes.(division euclidienne)
2. Suivant les puissances croissantes à l'ordre 5 (c'est-à-dire tel que le reste soit divisible par X^5)

Exercice 2
On cherche à détérminer les polynômes $P(X) \in \mathbb{R}[X]$ non nuls tels que $P(X^2 + 1) = P(X)^2 + 1$ et $P(0) = 0$
1) Calculer $P(1)$, $P(2)$, et $P(5)$
2) On pose $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = u_n^2 + 1$. Montrer que $P(u_n) = u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$
3) En déduire que $P(X) = X$

Exercice 3
Soit $f(X) = X^4 - X^3 - 4X^2 + 4X + 1$ et $g(X) = X^2 - X - 1$;
Déterminer le pgcd d des polynômes f et g et trouver deux polynômes u et v tels que $uf + vg = d$.
Donner également le ppcm des polynômes f et g.

Exercice 4$^{(*)}$
Donner le pgcd et le ppcm de P et Q :
$P(X) = X^3 + X^2 + 7X + 7$ et $Q(X) = X^3 + X^2 - 4X - 4$.

Exercice 5
1) Vérifier que les polynômes $A = X^3 + X^2 - 4X + 4$ et $B = (X - 1)^2$ sont premiers entre eux, et trouver une identité de Bezout entre A et B.
2) Trouver un polynôme de degré 4 dont le reste dans la division par A est 3 et dont le reste dans la divison par B est -1.

Exercice 6
On considère le polynôme $P(X) = X^2 + X + 1$.
1. Montrer que $j = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ est racine de P dans $\mathbb{C}$ et donner l'autre racine de P .
2. Montrer que cette dernière racine est le carré de l'autre.
3. Calculer j^3. En déduire j^{3m+1}, j^{3m+2} et j^{3m} pour $m \in \mathbb{N}$.
4. En déduire que P divise $X^{3n+2} + X^{3m+1} + X^{3p}$ pour tout $n, m, p \in \mathbb{N}$.

Indication : Remarquer que $P(X) = (X - j)(X - j^2)$ divise un polynôme Q si et seulement si j et j^2 sont racines de Q.

Exercice 7
Soit $P = X^6 + X^5 + 3X^4 + 2X^3 + 3X^2 + X + 1$.
1. Quelle est la multiplicité de i $(i^2 = -1)$ comme racine de P ?
2. Trouver toutes les racines de P dans $\mathbb{C}$, avec leurs ordres de multiplicité.
3. Donner la factorisation de P en produit de facteurs irréductibles sur $\mathbb{R}$.
4. Trouver le pgcd de P et du polynôme derivé P'.

Exercice 8
a) Factoriser $X^3 + 1$ sur $\mathbb{C}[X]$.
b) Même question sur $\mathbb{R}[X]$.
c) Déterminer l'ensemble des diviseurs unitaires du polynôme $P = (X^3 + 1)X^2$ dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 9
Décomposer en éléments simples sur $\mathbb{R}$ les fractions rationnelles
a) $\frac{X+3}{X^2-4}$ b)$^{(*)}$ $\frac{X^3-3X^2+X-4}{X-1}$ c) $\frac{2X^3+X^2-X+1}{X^2-3X+2}$ d)$^{(*)}$ $\frac{2X^2+3X+1}{(X-2)(X^2+2X+5)}$
e) $\frac{16}{(X-1)^3(X+1)^3}$

Université Ibn Tofail
Ecole Nationale des Sciences Appliquées
Kénitra, Maroc

Mathématiques, Algèbre 1, 2011-2012

Cycle préparatoire

Série $n°$: 4 **Correction**

Exercice 1 Effectuer la division de $A = X^6 - 2X^4 + X^3 + 1$ par $B = X^3 + X^2 + 1$:
1. Suivant les puissances décroissantes.(division euclidienne)
2. Suivant les puissances croissantes à l'ordre 5 (c'est–dire tel que le reste soit divisible par X^5)
1. Quotient $Q = X^3 - X^2 - X + 1$, reste $R = X$.
2. Quotient $Q = 1 - X^2 - X^4$, reste $R = X^5(1 + 2X + X^2)$.

Exercice 2 On cherche à détérminer les polynômes $P(X) \in \mathbb{R}[X]$ non nuls tels que $P(X^2+1) = P(X)^2+1$ et $P(X) = 0$
1) Calculer $P(1)$, $P(2)$, et $P(5)$
2) On pose $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = u_n^2 + 1$. Montrer que $P(u_n) = u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$
3) En déduire que $P(X) = X$
1) $P(1) = 1$, $P(2) = P(1^2 + 1) = 1 + 1 = 2$, $P(5) = P(2^2 + 1) = P(2)^2 + 1 = 4 + 1 = 5$
2) Par récurrence facile
3) D'après 2) $P(X) - X$ possède une infinité de zéros (éléments de la suite strictement croissante (u_n)) Donc $P(X) - X$ est le polynôme nul.

Exercice 3 Soit $f(X) = X^4 - X^3 - 4X^2 + 4X + 1$ et $g(X) = X^2 - X - 1$;
Déterminer le pgcd d des polynômes f et g et trouver deux polynômes u et v tels que $uf + vg = d$.
Donner également le ppcm des polynômes f et g.
On effectue l'algorithme d'Euclide sur f et g :
$f(X) = (X^2 - 3)g(X) + X - 2$; le premier reste est $r_1(X) = X - 2$;
$g(X) = (X + 1)r_1(X) + 1$; le second reste est $r_2(X) = 1$;
Lorsque le reste est une constante, il est inutile de continuer l'algorithme, on sait que le reste suivant sera 0.
D'où le pgcd de f et g est $d = 1$.
On a $1 = g(X) - (X + 1)r_1(X)$ d'après la dernière ligne de l'algorithme ;
Or $r_1(X) = f(X) - (X^2 - 3)g(X)$ d'après la première ligne de l'algorithme ;
D'où $1 = g(X) - (X + 1)f(X) - (X^2 - 3)g(X)$ ie $1 = g(X) - X^3 + X^2 - 3X - 2 - f(X)(X + 1)$.
On cherche le ppcm m de f et g : $md = fg$; car f et g sont unitaires
Or $d = 1$ donc $m(X) = f(X)g(X) = X^6 - 2X^5 - 4X^4 + 9X^3 + X^2 - 5X - 1$ est le ppcm de f et g.

Exercice 4 Donner les pgcd et ppcm de P et Q :
1. $P(X) = X^3 + X^2 + 7X + 7$ et $Q(X) = X^3 + X^2 - 4X - 4$.
Par l'algorithme d'Euclide, on obtient
$P(X) = Q(X) + 11X + 11$
$Q(X) = (11X + 11)(\frac{1}{11}X^2 - \frac{4}{11})$
Donc le dernier reste non nul est $11X + 11$.
D'où $D = (X + 1)$ est le pgcd de P et Q .
Ainsi il existe $U, V \in \mathbb{R}[X]$ / $P = UD$ et $Q = VD$ que l'on peut calculer :
$U(X) = X^2 + 7$ et $V(X) = X^2 - 4$.
le ppcm M de P et Q vérifie $MD = PQ = UVD^2$ et donc
$M(X) = U(X)V(X)D(X) = X^5 + X^4 + 3X^3 + 3X^2 - 28X - 28$ est le ppcm de P et Q.

Exercice 5
1) Vérifier que les polynômes $A = X^3 + X^2 - 4X + 4$ et $B = (X - 1)^2$ sont premiers entre eux, et trouver une identité de Bezout entre A et B.

Appliquons l'algorithme d'Euclide. La division euclidienne de A par B donne $A = (X + 3)B + X + 1$. La division euclidienne de B par le reste obtenu $X + 1$ donne $B = (X - 3)(X + 1) + 4$. Comme le reste trouvé ici est une constante non nulle, A et B sont premiers entre eux. On aurait pu le voir tout de suite: comme

1 n'est pas racine de A, les polynômes A et $(X-1)^2$ ne peuvent pas avoir de facteur irréductible commun. Mais l'algorithme d'Euclide permet d'obtenir une identité de Bezout, en "remontant les divisions":

$4 = B-(X-3)(X+1) = B-(X-3)(A-(X+3)B) = -(X-3)A+(X^2-8)B$

d'où

$$(\frac{-1}{4}X+\frac{3}{4})A+(\frac{1}{4}X^2-2)B = 1$$

2) Trouver un polynôme de degré 4 dont le reste dans la division par A est 3 et dont le reste dans la divison par B est -1.

On cherche un polynôme P de degré 4 vérifiant $P = AQ_1+3$ et $P = BQ_2-1$; on doit avoir $deg(Q_1)=1$ et $deg(Q_2) = 2$. En soustrayant les deux écritures de P, on obtient $AQ_1+3-(BQ_2-1) = 0$, soit $4 = -AQ_1+BQ_2$. En comparant avec l'égalité $4 = -(X-3)A+(X^2-8)B$ obtenue à la première question, on voit que le polynôme

$P = (X-3)A+3 = (X^2-8)B-1 = X^4-2X^3-7X^2+16X\ -9$ convient.

On aurait pu aussi procéder ainsi, sans utiliser l'identité de Bezout: on cherche

$P = (aX+b)A+3 = aX^4+(a+b)X^3+(b-4a)X^2+(4a-4b)X+4b+3$,

avec en plus la condition que $(X-1)^2$ divise $P+1$, ce qui équivaut à $P(1)+1 = 0$ et $P'(1) = 0$.

Ces deux conditions donnent les équations $2(a+b)+4 = 0$ et $3a+b = 0$. Donc $a = 1$ et $b = -3$, ce qui fait $P = (X-3)A+3$, comme ce qu'on a trouvé ci-dessus.

Exercice 6 On considère le polynôme $P(X) = X^2+X+1$.

1. Montrer que $j = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ est racine de P dans $\mathbb{C}$ et donner l'autre racine de P .

2. Montrer que cette dernière racine est le carré de l'autre.

3. Calculer j^3. En déduire j^{3m+1}, j^{3m+2}et j^{3m} pour $m \in \mathbb{N}$.

4. En déduire que P divise $X^{3n+2}+X^{3m+1}+X^{3p}$ pour tout $n, m, p \in \mathbb{N}$.

Indication : Remarquer que $P(X) = (X-j)(X-j^2)$ divise un polynôme Q si et seulement si j et j^2 sont racines de Q.

1. $\Delta = 1-4 = -3$ donc les racines de P sont $j = \dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ et $\dfrac{-1-i\sqrt{3}}{2}$

2. $\left(\dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \dfrac{-1-i\sqrt{3}}{2}$

3. $j^2+j+1 = 0 \Rightarrow j^2 = -j-1 \Rightarrow j^3 = j(-j-1) = -j^2-j = -(-j-1)-j = 1$

$j^{3m+1} = j^{3m}j = (j^3)^m j = 1^m j = j$

$j^{3m+2} = j^{3m}j^2 = (j^3)^m j^2 = 1^m j^2 = j^2$

$j^{3m} = (j^3)^m = 1^m = 1$

4. En déduire que P divise $Q(X) = X^{3n+2}+X^{3m+1}+X^{3p}$ pour tout $n, m, p \in \mathbb{N}$.

$P(X) = (X-j)(X-j^2)$ divise Q si et seulement si $X-j$ et $(X-j^2)$ divisent Q si et seulement si j et j^2 sont racines de Q.

Or

$Q(j) = j^{3n+2}+j^{3m+1}+j^{3p} = j^2+j+1 = 0$

$Q(j^2) = j^{2\times(3n+2)}+j^{2\times(3m+1)}+j^{2\times(3p)} = j^{3\times(2n+1)+1}+j^{3\times(2m)+2}+j^{3\times(2p)} = j+j^2+1 = 0$

Donc P divise Q.

Exercice 7 Soit $P = X^6+X^5+3X^4+2X^3+3X^2+X+1$.

1. Quelle est la multiplicité de i ($i^2 = -1$) comme racine de P ?

On a $P(i) = i^6+i^5+3i^4+2i^3+3i^2+i+1 = -1+i+3-2i-3+i+1 = 0$.

On a $P' = 6X^5+5X^4+12X^3+6X^2+6X+1$ et $P'(i) = -6i+5-12i-6+6i+1 = 0$.

On a $P'' = 30X^4+20X^3+36X^2+12X+6$ et $P''(i) = 30-20i-36+12i+6 = -8i \neq 0$.

Donc i est racine de P de multiplicité 2.

2. Trouver toutes les racines de P dans $\mathbb{C}$, avec leurs ordres de multiplicité.

Puisque P est à coefficients réels et que i est racine de P de multiplicité 2, son conjugué $-i$ est aussi racine de P de multiplicité 2. On a déjà 4 des racines de P dans $\mathbb{C}$ comptées avec leur multiplicité. Appelons α et β les deux autres racines (P est de degré 6, donc il a 6 racines comptées avec leur multiplicité dans $\mathbb{C}$). Puisque P est unitaire, la somme des racines est l'opposé du coefficient de X^5 dans P . On a donc $i+i+(-i)+(-i)+\alpha+\beta = -1$, d'où $\alpha+\beta = -1$. Comme P est en plus de degré pair, le produit des racines est égal au terme constant de P, donc $i\times\ i\times\ (-i)\times\ (-i)\times\alpha\times\ \beta=1$, d'où $\alpha\beta=1$. Les nombres α et β, sont les racines de l'équation $X^2+X+1=0$, d'où $\alpha=\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}=j$ et $\beta=\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}=\overline{j}$

Les racines de P dans $\mathbb{C}$ sont i avec multiplicité 2, $-i$ avec multiplicité 2, j et $\overline{j}$.

3. Donner la factorisation de P en produit de facteurs irréductibles sur $\mathbb{R}$.

En regroupant chaque racine complexe avec sa conjuguée (i avec $-i$, j avec $\overline{j}$), on obtient :

$$P=(X^2+1)^2(X^2+X+1)$$

4. Trouver le pgcd de P et du polynôme derivé P'. Parmi les racines de P dans $\mathbb{C}$, i et $-i$ sont racines de P' de multiplicité 1, et j et j ne sont pas racines de P'. Les racines du pgcd de P et P' dans $\mathbb{C}$ sont donc i et $-i$ avec multiplicité 1, et le pgcd est $(X-i)(X+i)=X^2+1$

Exercice 8

a) Factoriser X^3+1 sur $\mathbb{C}[X]$.

$X^3+1=(X+1)(X-e^{\frac{i\pi}{3}})(X-e^{-\frac{i\pi}{3}})$.

b) Même question sur $\mathbb{R}[X]$.

$X^3+1=(X+1)(X^2-X+1)$

c) Déterminer l'ensemble des diviseurs unitaires du polynôme $P=(X^3+1)X^2$ dans $\mathbb{R}[X]$.

- Facteurs irréductibles $1, X, (X+1), (X^2-X+1)$

- Facteurs réductibles $X(X+1), X(X+1)(X^2-X+1), X(X^2-X+1), X^2, X^2(X+1), X^2(X^2-X+1), (X+1)(X^2-X+1), P$

Exercice 9 Décomposer en éléments simples sur $\mathbb{R}$ les fractions rationnelles

a) $\dfrac{X+3}{X^2-4}$ b) $\dfrac{X^3-3X^2+X-4}{X-1}$ c) $\dfrac{2X^3+X^2-X+1}{X^2-3X+2}$ d) $\dfrac{2X^2+3X+1}{(X-2)(X^2+2X+5)}$ e) $\dfrac{16}{(X-1)^3(X+1)^3}$

a) $\dfrac{X+3}{X^2-4}=\dfrac{5}{4(X-2)}-\dfrac{1}{4(X+2)}$.

b) $\dfrac{X^3-3X^2+X-4}{X-1}=X^2-2X-1-\frac{5}{X-1}$.

c) $\dfrac{2X^3+X^2-X+1}{X^2-3X+2}=2X+7-\dfrac{3}{X-1}+\dfrac{19}{X-2}$.

d) $\dfrac{2X^2+3X+1}{(X-2)(X^2+2X+5)}=\dfrac{1}{X-2}+\dfrac{X+3}{X^2+2X+5}$

e) Soit $G(X)=\dfrac{16}{(X-1)^3(X+1)^3}$ La décomposition ne contient pas de partie entière et est de la forme

$G=\dfrac{a}{(X-1)^3}+\dfrac{b}{(X-1)^2}+\dfrac{c}{(X-1)}+\dfrac{d}{(X+1)^3}+\dfrac{e}{(X+1)^2}+\dfrac{f}{(X+1)}$

Comme G est paire, on a

$G(-X)=G(X)=\dfrac{-a}{(X+1)^3}+\dfrac{b}{(X+1)^2}+\dfrac{-c}{(X+1)}+\dfrac{-d}{(X-1)^3}+\dfrac{e}{(X-1)^2}+\dfrac{-f}{(X-1)}$

et donc $d=-a$, $e=b$ et $f=-c$. Il suffit de déterminer la partie polaire relative au pôle 1; pour ceci on fait le changement de variable $X=1+Y$ et on effectue la division suivant les puissances croissantes à l'ordre 2 de 16 par $(1+Y+1)^3=8+12Y+6Y^2+Y^3$.

$16=(8+12Y+6Y^2)(2-3Y+3Y^2)+24Y^2$

On en tire $a=2$, $b=-3$, $c=3$ et en conclusion

$$G=\frac{2}{(X-1)^3}-\frac{3}{(X-1)^2}+\frac{3}{(X-1)}-\frac{2}{(X+1)^3}-\frac{3}{(X+1)^2}-\frac{3}{(X+1)}$$