Université Ibn Tofail **Mathématiques, Algèbre 1, 2011-2012**
Ecole Nationale des Sciences Appliquées
Kénitra, Maroc

Cycle préparatoire

Série $n°$: 2

Exercice 1:
1) Donner l'écriture en base 10 de a) $A = \overline{231}^{(4)}$ b) $A = \overline{1001}^{(2)}$ c) $A = \overline{4132}^{(5)}$
2) Ecrire la suite des 10 premiers nombres entiers en base deux et en base quatre
3) En base douze, on désigne par A le chiffre correspondant à 10, par B celui correspondant à 11. Ecrire la suite des cinq successeurs de $9BA$
4) Ecrire le nombre 53 en base deux.
5) Soit $A = 2183$. Ecrire A dans le système octal.
6) Soit $A = 5012$ en base 7. Ecrire A en base 2.
7) A s'écrit 23 dans le système décimal et 27 dans un système de base a. Que vaut a ?.
Exercice 2: Sachant que l'on a $96842 = 256 \times 375 + 842$,
Déterminer, sans faire la division, le reste de la division euclidienne du nombre 96842 par chacun des nombres 256 et 375.
Exercice 3: Déterminer les entiers relatifs k tels que $3k - 2$ divise $12k + 5$
Exercice 4: Soient $a, b, c, k \geq 1$,et q des entiers naturels.
1) Montrer que si $a = bq + c$, alors $p\gcd(a, b) = p\gcd(b, c)$,
2) Montrer que $5k - 2$ et $2k - 1$ sont premiers entre eux.
3) Déterminer le ppcm de $5k + 3$ et de $2k - 1$.
Exercice 5: Déterminer les couples d'entiers naturels de pgcd 18 et de somme 360. De même avec pgcd 18 et produit 6480.
Exercice 6$^{(*)}$**:** Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$:
$n(n+1)(n+2)(n+3)$ est divisible par 24,
$n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)$ est divisible par 120.
Exercice 7:
1) Montrer que la droite d'équation $27x - 16y + 1 = 0$ passe par une infinité de points dont les coordonnées sont des entiers relatifs.
2) Résoudre dans $\mathbb{Z}$, l'équation $135x - 169y = 36$
3) Calculer $\text{pgcd}(2275, 1638)$ et détérminer u et v tels que $2275u + 1638v = d$.
Exercice 8: Montrer que:
1) Pour $1 \leq k \leq n$, $kC_n^k = nC_{n-1}^{k-1}$ et $(n+1)C_{2n}^{n-1} = nC_{2n}^n$
2) Montrer que $\forall (k, n) \in (\mathbb{N}^*)^2$, $(k \wedge n = 1) \Rightarrow n | C_n^k$
3) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $(n+1) | C_{2n}^n$
(on peut utiliser le 1) pour faire le 2) et le 3))
Exercice 9: Montrer que:
1) $3^{2n} - 2^n$ et $3^{2n+1} + 2^{n+2}$ sont divisibles par 7;
2) $2^{2n} + 2^n + 1$ est divisible par 7 si et seulement si n n'est pas un multiple de 3;
3) $3^3 \equiv 1[13]$ et $3^{3n} \equiv 1[13]$. En déduire que le nombre $3^{6n+2} + 3^{3n+1} + 1$ est un multiple de 13 pour tout entier naturel n.
Exercice 10: Soient m et n deux entiers premiers entre eux.
Détérminer x_1, x_2 tels que $x_1 \equiv 1\,[n]$, $x_1 \equiv 0\,[m]$ et $x_2 \equiv 0\,[n]$, $x_2 \equiv 1\,[m]$
Résoudre dans $\mathbb{Z}$ le système $x = 7\,[n]$, $x = 21\,[m]$ avec $n = 36$ et $m = 7$.

Université Ibn Tofail **Mathématiques, Algèbre 1, 2011-2012**
Ecole Nationale des Sciences Appliquées
Kénitra, Maroc

Cycle préparatoire

Série $n°$: 2 **Correction**

Exercice1:
1)
a) $A = \overline{231}^{(4)} = 2 * 4^2 + 3 * 4 + 1 = 97$
b) $A = \overline{1001}^{(2)} = 1 * 2^3 + 0 * 2^2 + 0 * 2 + 1 = 9$
c) $A = \overline{4132}^{(5)} = 4 * 5^3 + 1 * 5^2 + 3 * 5 + 2 = 542$
2) En base deux : $0, 1, 10, 11, 100, 101, 110, 111, 1000, 1001, 1010$ En base quatre : $0, 1, 2, 3, 10, 11, 12, 13, 20, 21$
3) Après $BA9$, on trouve BAA, BAB, $BB0, BB1$ et $BB2$
4) 1) On divise 53 successivement par deux, jusqu'à l'obtention d'un quotient nul. En recopiant la suite des restes, on obtient : $53 = \overline{110101}^{(2)}$
5) On divise 2183 successivement par huit, jusqu'à l'obtention d'un quotient nul. En recopiant la suite des restes, on obtient : $2183 = \overline{4207}^{(8)}$
6) On commence par convertir $A = 5012$ de la base 7 à la base 10, Ainsi $A = 5*7^3+0*7^2+1*7+2 = 1724$ et on le convertit en base 2 comme dans l'exemple précédent.
7) Si A s'écrit 27 dans un système de base a, alors en le convertissant en base 10 : $\overline{27}^{(a)} = 2 * a + 7$
Si par ailleurs A s'écrit 23 en base 10, on aura donc $2a + 7 = 23 \Leftrightarrow a = 8$.
Exercice2:
La seule chose à voir est que pour une division euclidienne le reste doit être plus petit que le quotient.
Donc les divisions euclidiennes s'écrivent : $96842 = 256 \times 378 + 74$ et $96842 = 258 \times 375 + 92$.
Exercice3:
$12k + 5 = 4(3k - 2) + 13$ Ainsi $3k - 2|12k + 5$ ssi $3k - 2|13$ c à d $3k - 2 = 1$ ou -1 ou 13 ssi $k = 1$ou $k = 5$.
Exercice4:
1) Evident
2) $5k - 2 = 2(2k - 1) + k$ donc d'après 1) $pgcd(5k - 2, 2k - 1) = pgcd(2k - 1, k) = pgcd(k, 1) = 1$.
3) On passe par le pgcd. On trouve $pgcd(5k + 3, 2k - 1) = pgcd(k + 5, 11)$
1^{er} cas: $Si k+5 = 11d \Leftrightarrow k = 11d-5$ et $2k-1 = 11(2d-1)$ Leur PPCM est donc égal à $11(5d-2)(2d-1)$ (car $pgcd(5d - 2, 2d - 1)$)
2^{eme} cas: $pgcd(5k+3, 2k-1) = pgcd(k+5, 11) = 1$ Dans ce cas PPCM$(5k+3, 2k-1) = (5k+3)(2k-1)$.
Exercice5:
Soient a, b deux entiers de pgcd 18 et de somme 360. Soit a', b' tel que a = 18a'
et b = 18b'. Alors a' et b' sont premiers entre eux, et leur somme est 360/18 = 20.
Nous pouvons facilement énumérer tous les couples d'entiers naturels (a', b') (a' $\leq$ b') qui vérifient cette condition, ce sont les couples : $(1, 20), (3, 17), (6, 14), (7, 13), (8, 12), (9, 11)$. Pour obtenir les couples (a, b) recherchés (a 6 b), il suffit de multiplier les couples précédents par 18 :
$(18, 360), (54, 306), (108, 252), (126, 234), (144, 216), (162, 198)$.
Exercice6:
Pour 3. Montrons plutôt la contraposée. Soit $p = ab$ un entier avec $a, b \in \mathbb{N}$.
Montrons que $2^p - 1$ n'est pas premier.
Nous savons que $x^b - 1 = (x - 1)(x^{b-1}+\cdots+x + 1)$,
Pour $x = 2^a$ nous obtenons :
$2^p - 1 = 2^{ab} - 1 = (2^a)^b - 1 = (2^a - 1)(2^{a(b-1)}+\cdots+2^a + 1$.
De plus $2^a - 1$ n'est ni 1 ni 2^{ab} donc nous avons décomposer $2^p - 1$ en produit d'entier différents de 1. Donc $2^p - 1$ n'est pas premier.
Par contraposition nous obtenons que si $2^p - 1$ est premier alors p est premier.

Exercice7:

1) $(-3,-5)$ est (une solution particulière) un point particulier de la droite (D) d'équation $27x-16y+1=0$

En utilisant la méthode classique de la résolution des équations diophtanniennes on trouve que $(16k-3, 27k-5) \in (D), k \in \mathbb{Z}$

2) $135 = 5*3^3$ 5 et 3 ne divisent pas 169 Donc $\text{pgcd}(169, 135) = 1$

$169 = 135 + 34$

$135 = 3*34 + 33$

$34 = 33 + 1$

$1 = 4*169 - 5*135$

$(-5,-4)$ est une solution particulière de l'équation. On fait pareil que la question précédente et on détérmine toutes les solutions.

3) En utilisant l'algorithme d'Euclide on trouve $\text{pgcd}(2275, 1638) = 91$ et on déduit que:

$91 = 364 - 273$

$= 364*2 - (637-364) = 2*364 - 637$

$= 2(1638 - 2*637) = 2*1638 - 5*637$

$= 2(638 - 5(2275 - 1638)$

$= 7*1638 - 5*2275.$

Exercice8:

1) Pour $1 \leq k \leq n$, $kC_n^k = nC_{n-1}^{k-1}$ et $(n+1)C_{2n}^{n-1} = nC_{2n}^n$ Evident

2) D'après 1) on a $kC_n^k = nC_{n-1}^{k-1}$ donc n divise kC_n^k et puisque k et n sont premiers entre eux, le théorème de Gauss permet d'affirmer que n divise C_n^k

3) De même, l'égalité $(n+1)C_{2n}^{n-1} = nC_{2n}^n$ montre que (n + 1) divise nC_{2n}^n et, puisque n et $(n+1)$ sont premiers entre eux (d'après Bézout puisque $(n+1)-n=1$), $(n+1)$ divise C_{2n}^n d'après le théorème de Gauss.

Exercice9:

1) $3^{2n} - 2^n = (3^2)^n - 2^n = (3^2-2)((3^2)^{n-1} + ...) = 7((3^2)^{n-1} + ...)$

On peut aussi le faire par récurrence ou passer par les congruences

on procède de la meme facon pour $3^{2n+1} + 2^{n+2}$

2) n non congru $0\,[3] \Leftrightarrow n = 3k + k\prime$ avec $k\prime = 1$ ou $k\prime = 2$

$\Leftrightarrow 2^{2n} + 2^n + 1 = (2^2)^{3k+k\prime} + 2^{3k+k\prime} + 1 = (2^6)^k.2^{2k\prime} + (2^3)^k.2^{k\prime} + 1 \equiv 2^{2k'} + 2^{k'} + 1\,[7] \equiv 0\,[7]$ car si $k\prime = 1$ $2^{2k'} + 2^{k'} + 1 = 7 \equiv 0\,[7]$ et si $k\prime = 2$ $2^{2k'} + 2^{k'} + 1 = 21 \equiv 0\,[7]$.

3) facile