Université Ibn Tofail **Mathématiques, Algèbre 1, 2011-2012**
Ecole Nationale des Sciences Appliquées
Kénitra, Maroc

Cycle préparatoire

Série $n°$: 1

Exercice 1. Ecrire la négation des assertions suivantes où P, Q, R et S sont des propositions.
1. $P \Longrightarrow Q$,
2. $P \wedge \overline{Q}$,
3. $P \wedge (Q \wedge R)$,
4. $P \vee (Q \wedge R)$,
5. $(P \wedge Q) \Longrightarrow (R \Longrightarrow S)$.

Exercice 2. A l'aide d'une table de verité, montrer que on a :
a) $(A \wedge (A \Rightarrow B)) \Rightarrow B$ (règle d'inférence ou syllogisme)
b) $((O \Rightarrow P) \wedge (P \Rightarrow Q)) \Rightarrow (O \Rightarrow Q)$. (Transitivité de $\Rightarrow$).

Exercice 3.
On considère les ensembles suivants :
$A = \{1, 2, 5\}$, $B = \{\{1, 2\}, 5\}$, $C = \{\{1, 2, 5\}\}$, $D = \{\emptyset, 1, 2, 5\}, E = \{5, 1, 2\}$, $F = \{\{1, 2\}, \{5\}\}$, $G = \{\{1, 2\}, \{5\}, 5\}$, $H = \{5, \{1\}, \{2\}\}$.
1) Quelles sont les relations d'égalité ou d'inclusion existant entre ces ensembles ?
2) Donner le cardinal de chacun de ces ensembles.
3) Déterminer $A \cap B, G \cup H, E \backslash G$.
4) Quel est le complémentaire de A dans D?

Exercice 4. Écrire la négation des propositions suivantes :

$$\text{(a) } \forall x \in E,\ \exists y \in E,\ P(x, y). \quad \text{(b) } \exists! x \in E,\ \forall y \in E,\ P(x, y).$$
$$\text{(c) } \exists r \in R,\ \exists s \in R,\ \forall x \in R,\ x \leq r \text{ et } s \leq x.$$

Exercice 5. Soit f, g deux aplications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Traduire en termes de quantificateurs les expressions suivantes
1. f est majorée ; 2. f est bornée ; 3. f est paire ; 4. f est impaire ; 5. f ne s'annule jamais ; 6. f est périodique ; 7. f est croissante ; 8. f est strictement décroissante ; 9. f n'est pas la fonction nulle ; 10. f n'a jamais les mêmes valeurs en deux points distcincts ; 11. f atteint toutes les valeurs de $\mathbb{N}$; 12. f est inférieure à g ; 13. f n'est pas inférieure à g.

Exercice 6. Soient $f : E \longrightarrow F$, $A, B \subset E$ et $M, N \subset F$, Montrer qu'on a:
1. $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$
2. $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$
3. $f^{-1}(M \cup N) = f^{-1}(M) \cup f^{-1}(N)$

Exercice 7. Dans $\mathbb{R}$ on définit la relation R par :

$$\forall x, y \in \mathbb{R},\ xRy \Leftrightarrow x^2 - 1 = y^2 - 1$$

1) Montrer que R est une relation d'équivalence
2) Donner l'ensemble quotient $\mathbb{R}/R$.

Exercice 8.. Soit f une application de E dans F, Montrer que :
f est injective $\Leftrightarrow \forall A \subset E\ A = f^{-1}(f(A))$,
f est surjective $\Leftrightarrow \forall B \subset F, B = f(f^{-1}(B))$.

Exercice 9.
On définit les applications:

$$f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} \quad n \longrightarrow 2n \quad \text{et} \quad g : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} \quad n \longrightarrow \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{si } n \text{ est pair} \\ \frac{n-1}{2} & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

Étudier l'injectivité et la surjectivité de f, g, $f \circ g$ et $g \circ f$.

Université Ibn Tofail **Mathématiques, Algèbre 1, 2011-2012**
Ecole Nationale des Sciences Appliquées
Kénitra, Maroc

Cycle préparatoire

Série n° : 1 **Correction**

Exercice 1.

On utilise les règles de De Morgan, l'équivalence $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (Q \vee \overline{P})$ et $\overline{\overline{P}} \Leftrightarrow P$ On obtient:

1. $\overline{(P \Longrightarrow Q)} \Leftrightarrow P \wedge \overline{Q}$;
2. $\overline{(P \wedge \overline{Q})} \Leftrightarrow \overline{P} \vee Q$ ce qui est équivalent aussi à $(P \Longrightarrow Q)$;
3. $\overline{(P \wedge (Q \wedge R))} \Leftrightarrow \overline{P} \vee (\overline{Q} \vee \overline{R})$ (on peut supprimer les parenthèses) ;
4. $\overline{(P \vee (Q \wedge R))} \Leftrightarrow \overline{P} \wedge (\overline{Q} \vee \overline{R})$ (ici les parenthèses sont importantes) ;
5. $\overline{(P \wedge Q) \Longrightarrow (R \Longrightarrow S)} \Leftrightarrow \overline{\overline{(P \wedge Q)} \vee (R \Longrightarrow S)} \Leftrightarrow \overline{(\overline{P} \vee \overline{Q}) \vee (\overline{R} \vee S)} \Leftrightarrow \overline{(\overline{P} \vee \overline{Q})} \wedge \overline{(\overline{R} \vee S)} \Longleftrightarrow (\overline{\overline{P}} \wedge \overline{\overline{Q}}) \wedge (\overline{\overline{R}} \wedge \overline{S}) \Longleftrightarrow (P \wedge Q) \wedge (R \wedge \overline{S}) \Leftrightarrow P \wedge Q \wedge R \wedge \overline{S}$.

Exercice 2.

a)

A	0	0	1	1
B	0	1	0	1
$A \Rightarrow B$	1	1	0	1
$A \wedge (A \Rightarrow B)$	0	0	0	1
$(A \wedge (A \Rightarrow B)) \Rightarrow B$	1	1	1	1

On voit donc d'apres la table de verité que la proposition $R = ((A \wedge (A \Rightarrow B)) \Rightarrow B)$ est toujours vraie

b) Notons R la proposition logique :

$$[(O \Rightarrow P) \wedge ((P \Rightarrow Q)) \Rightarrow (O \Rightarrow Q)]$$

En utilisant la définition de l'implication et les propriétés vues dans le cours, on obtient :

$R \Leftrightarrow [(O \Rightarrow P) \wedge (P \Rightarrow Q) \Rightarrow (O \Rightarrow Q)]$

$\Leftrightarrow \left[(O \Rightarrow Q) \vee \overline{((O \Rightarrow P) \wedge (P \Rightarrow Q))}\right]$

$\Leftrightarrow \left[(O \Rightarrow Q) \vee (\overline{(O \Rightarrow P)} \vee \overline{(P \Rightarrow Q)})\right]$

$\Leftrightarrow \left[(Q \vee \overline{O}) \vee \overline{(P \vee \overline{O})} \vee \overline{(Q \vee \overline{P})}\right]$

$\Leftrightarrow \left[(Q \vee \overline{O}) \vee (\overline{P} \wedge \overline{\overline{O}}) \vee (\overline{Q} \wedge \overline{\overline{P}})\right]$

$\Leftrightarrow \left[(Q \vee \overline{O}) \vee (\overline{P} \wedge O) \vee (\overline{Q} \wedge P)\right]$

Ainsi, pour montrer que la proposition R est vraie, il suffit de montrer que toutes ses valeurs de vérité sont égales à 1. On a :

O	0	0	0	0	1	1	1	1
P	0	0	1	1	0	0	1	1
Q	0	1	0	1	0	1	0	1
$Q \vee \overline{O}$	1	1	1	1	0	1	0	1
$\overline{P} \wedge O$	0	0	0	0	1	1	0	0
$\overline{Q} \wedge P$	0	0	1	0	0	0	1	0
R	1	1	1	1	1	1	1	1

ce qui montre la véracité de R, donc la transitivité de l'implication.

Exercice 3

1) $A = E$, $E \subset D$; $F \subset G$, $B \subset G$.

2) card $A = 3$, card $B = 2$, card $C = 1$, card $D = 4$, card $E = 3$, card $F = 2$, card $G = 3$, card $H = 3$.

3) $A \cap B = \{5\}, G \cup H = \{5, \{1\}, \{2\}, \{5\}, \{1,2\}\}, E \backslash G = \{1,2\}$

4) Le complémentaire de A dans D est $D \backslash A = \{\emptyset\}$.

Exercice 4. la négation des propositions sont :

(a) $\exists x \in E, \forall y \in E, \overline{P(x,y)}$

(b) $(\forall x \in E, \exists y \in E, \overline{P(x,y)}) \quad \vee (\exists x_1 \in E, \exists x_2 \in E, x_1 \neq x_2, \forall y \in E, (P(x_1,y)$ et $P(x_2,y)))$

(c) $\forall r \in R, \forall s \in R, \exists x \in R, x > r$ ou $s > x$.

Exercice 5

1. $\exists\ M \in \mathbb{R}\ \forall x \in \mathbb{R}\ f(x) \leq M$; 2. $\exists\ M \in \mathbb{R}^+\ \forall x \in \mathbb{R}\ |f(x)| \leq M$; 3. $\forall x \in \mathbb{R}\ f(x) = f(-x)$; 4. $\forall x \in \mathbb{R}\ f(x) = -f(-x)$; 5. $\forall x \in \mathbb{R}\ f(x) \neq 0$; 6. $\exists a \in \mathbb{R}^*\ \forall x \in \mathbb{R}\quad f(x+a) = f(x)$; 7. $\forall (x;y) \in \mathbb{R}^2\ (x \leq y) \Longrightarrow f(x) \leq f(y))$; 8. $\forall (x;y) \in \mathbb{R}^2\ (x < y) \Longrightarrow f(x) > f(y))$; 9. $\exists x \in \mathbb{R}\ f(x) \neq 0$; 10. $\forall (x;y) \in \mathbb{R}^2\ (x \neq y) \Longrightarrow f(x) \neq f(y))$; 11. $\forall n \in \mathbb{N}\ \exists x \in \mathbb{R}\ f(x) = n$; 12. $\forall x \in \mathbb{R}\ f(x) < g(x)$; 13. $\exists x \in \mathbb{R}\ f(x) > g(x)$.

Exercice 6.

1. Soit $y \in F$, alors

$$\begin{aligned} y \in f(A \cup B) &\Leftrightarrow \exists x \in A \cup B; y = f(x) \\ &\Leftrightarrow \exists x\ [(x \in A) \vee (x \in B) \wedge (y = f(x))] \\ &\Leftrightarrow \exists x\ [((x \in A) \wedge (y = f(x))) \vee ((x \in B) \wedge (y = f(x)))] \\ &\Leftrightarrow [\exists x\ ((x \in A) \wedge (y = f(x)))] \vee [\exists\ x((x \in B) \wedge (y = f(x)))] \\ &\Leftrightarrow (y \in f(A)) \vee (y \in f(B)) \\ &\Leftrightarrow y \in f(A) \cup f(B) \end{aligned}$$

ce qui montre que $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.

2. Soit $y \in F$, alors

$$\begin{aligned} y \in f(A \cap B) &\Leftrightarrow \exists x \in A \cap B; y = f(x) \\ &\Leftrightarrow \exists x\ ((x \in A) \wedge (x \in B) \wedge (y = f(x))) \\ &\Leftrightarrow [\exists x\ ((x \in A) \wedge (y = f(x))) \wedge ((x \in B) \wedge (y = f(x)))] \\ &\Rightarrow [\exists x\ ((x \in A) \wedge (y = f(x)))] \wedge [\exists x\ ((x \in B) \wedge (y = f(x)))] \\ &\Rightarrow (y \in f(A)) \wedge (y \in f(B)) \\ &\Rightarrow y \in f(A) \cap f(B) \end{aligned}$$

ce qui montre que $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$.

3. Soit $x \in E$, alors

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}(M \cup N) &\Leftrightarrow f(x) \in M \cup N \\ &\Leftrightarrow (f(x) \in M) \vee (f(x) \in N)) \\ &\Leftrightarrow (x \in f^{-1}(M)) \vee (x \in f^{-1}(N)) \\ &\Leftrightarrow x \in f^{-1}(M) \cup f^{-1}(N) \end{aligned}$$

ce qui montre que $f^{-1}(M \cup N) = f^{-1}(M) \cup f^{-1}(N)$.

Exercice 7

Dans $\mathbb{R}$ on définit la relation R par :

$$\forall x, y \in \mathbb{R},\ \ xRy \Leftrightarrow x^2 - 1 = y^2 - 1$$

Montrer que R est une relation d'équivalence et donner l'ensemble quotient $\mathbb{R}/R$.

1. R est une relation d'équivalence.

i) R est une relation Réflexive, car d'après la Réflexivité de l'égalité on a :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 - 1 = x^2 - 1, \text{ donc } \forall x \in \mathbb{R},\ xRx$$

ce qui montre que R est une relation Réflexive.

ii) R est une relation Symétrique, car d'après la Symétrie de l'égalité on a :

$$\begin{aligned} \forall x, y \in \mathbb{R},\ xRy &\Leftrightarrow x^2 - 1 = y^2 - 1 \\ &\Leftrightarrow y^2 - 1 = x^2 - 1 \text{ car l'égalité est symétrique} \\ &\Leftrightarrow yRx \end{aligned}$$

donc $\qquad \forall x, y \in \mathbb{R},\ \ xRy \Leftrightarrow yRx$

ce qui montre que R est une relation Symétrique.

iii) R est une relation Transitive, car d'après la Transitivité de l'égalité on a :

$$\begin{aligned} \forall x, y, z \in \mathbb{R},\ (xRy) \wedge (yRz) &\Rightarrow (x^2 - 1 = y^2 - 1) \wedge (y^2 - 1 = z^2 - 1) \\ &\Rightarrow (x^2 - 1 = z^2 - 1) \text{ car l'égalité est Transitive.} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow (xRz)$$

donc

$$\forall x,\, y,\, z \in \mathbb{R},\, (xRy) \wedge (yRz) \Rightarrow (xRz)$$

ce qui montre que R est une relation Transitive.
De i) , ii) et iii) , on déduit que R est une relation d'équivalence.
2. Déterminons l'ensemble quotient $\mathbb{R}/R$.
Soit $x \in R$, alors :

$$\begin{aligned}\forall y \in \mathbb{R}, \quad xRy &\Leftrightarrow x^2 - 1 = y^2 - 1\\ &\Leftrightarrow x^2 - y^2 = 0\\ &\Leftrightarrow (x-y)(x+y) = 0\\ &\Leftrightarrow (y = x) \vee (y = -x)\end{aligned}$$

donc : $\dot{x} = \{x, -x\}$, par suite

$$\mathbb{R}/R = \{\{x, -x\}, \quad x \in \mathbb{R}\}$$

Exercice 8.

a) Commençons par remarquer qu'on a toujours, si $A \subset E$, $A \subset f^{-1}(f(A))$. En effet, si $x \in A$, x est un antécédent de $f(x)$, qui par définition appartient à $f(A)$, donc $x \in f^{-1}(f(A))$.

Supposons maintenant f injective et $x \in f^{-1}(f(A))$. On a donc $f(x) \in f(A)$, c'est-à-dire qu'il existe un élément z dans A tel que $f(x) = f(z)$ (mais a priori z n'a aucune raison d'être égal à x). Comme f est injective, on a lors $z = x$, donc en fait $x \in A$ et $f^{-1}(f(A)) \subset A$, d'où l'égalité de ces deux ensembles.

Pour la réciproque, supposons que $\forall A \subset E$, $A = f^{-1}(f(A))$, et soit x un élément de E. En appliquant l'hypothèse à $A = \{x\}$, on a $f^{-1}(f(\{x\}) = \{x\}$. Or, $f(\{x\}) = \{f(x)\}$, donc $f^{-1}(f(\{x\}))$ est constitué de tous les antécédents de $f(x)$. La propriété nous indique donc que, quel que soit x, $f(x)$ n'a qu'un antécédent par f, c'est la définition d'une application injective.

b) Pour la caractérisation de la surjectivité, c'est un peu similaire : on a toujours $g(g^{-1}(M)) \subset M$ (les images d'antécédents d'éléments de M sont ces éléments de M). Si de plus g est surjective, tout élément y de M admet au moins un antécédent dans A, dont l'image sera y, donc $y \in g(g^{-1}(M))$, et $M = g(g^{-1}(M))$.

Réciproquement, si $\forall M \subset F, M = g(g^{-1}(M))$, on a en particulier, si $y \in F$, $\{y\} = g(g^{-1}(\{y\}))$, mais ceci implique que y ait au moins un antécédent par g, sinon l'ensemble $g^{-1}(\{y\})$ serait vide et son image par g aussi L'application g est donc surjective.

Exercice 9.

L'application f est injective (en effet, si $2n = 2n^{'}$, on a $n = n^{'}$), mais pas surjective, 3 par exemple n'a pas d'antécédent par f (toutes les images des entiers par f sont des entiers pairs).

Au contraire, g est surjective car tout entier n est antécédent par g de son double $2n$, mais n'est pas injective, car 2 et 3 par exemple ont la même image par g.

Comme $g \circ f$ n'est autre que l'identité sur $\mathbb{N}$ elle est bien entendu bijective.

Enfin, $f \circ g$ n'est ni injective (pour la même raison que g : 2 et 3 ont la même image) ni surjective (pour la même raison que f : toutes les images sont paires, donc 3 n'a pas d'antécédent).