Table des matières

Chapitre 1

Ensembles relations binaires et applications

1.1 Propositions logiques

Dans cette partie on se limitera à l'introduction des premiers éléments de la logique classique.

Définition 1 *On appelle proposition logique toute relation, (ou énoncé) P qui est soit vraie soit fausse.*

• Quand la proposition est vraie, on lui affecte la valeur 1 (ou V). [1]
• Quand la proposition est fausse, on lui affecte la valeur 0 (ou F).
Ces valeurs sont appelées "Valeurs de vérité de la proposition".

Ainsi, pour définir une proposition logique, il suffit de donner ses valeurs de vérités. En général, on met ces valeurs dans un tableu qu'on nommera "Table de vérités" ou "Tableau de vérités".

Exemple 1

– (P_1) : $\sqrt{2}$ est un nombre rationnel,
– (P_2) : par deux points passe une droite et une seule,
– (P_3) : une fonction dérivable est continue.
– (P_4) : il pleut
– (P_5) : $3x + 2 = 2$
– (P_6) : Toute partie de $\mathbb{N}$ admet un plus petit élément.

Ainsi (P_1) est fausse et (P_3) est vraie. Les valeurs de verité de (P_4) dépendent du contexte et (P_5) est une proposition qui depend de x.

1. Le fait qu'une proposition ne peut prendre que les valeurs 0 ou 1 provient d'un principe fondamental de la logique "classique" qui est : Le principe du tiers exclu, à savoir qu'une proposition logique ne peut pas être vraie et fausse à la fois.

Mais "Que dieu vous benisse" n'est pas une proposition (elle n'est ni vraie ni fausse! c'est juste un souhait) aussi "Viens! " n'est pas non plus une proposition.

Un certain nombre de propositions sont considérées comme vérités premières, qui ne se déduisent pas d'autres propositions vraies. Certaines d'entre elles traduisent en langage mathématique les propriétés les plus évidentes des objets concrets auxquels on pense. On les appelle des axiomes. Par exemple, (P_2) est un des axiomes de la géométrie euclidienne, ainsi que (P_6) qui est un des axiomes pour la construction de l'ensemble $\mathbb{N}$.

Les autres propositions vraies le sont par déduction des axiomes ou d'autres propositions dont la vérité est déjà démontrée. Les axiomes sont en petit nombre et possèdent une cohérence interne, en ce sens qu'on ne peut déduire d'eux aucune proposition à la fois vraie et fausse.

1.2 Opérations Logiques

1.2.1 La négation $\neg$

Etant donnée une proposition logique P, on appelle négation de P la proposition logique $\overline{P}$, qu'on note aussi $\neg P$ ou non(P), qui est fausse quand P est vraie et qui est vraie quand P est fausse, donc on peut la représenter comme suit :

P	0	1
$\overline{P}$	1	0

1.2.2 L'équivalence $\Leftrightarrow$

On dit que deux propositions logiques P et Q sont équivalentes, si elles ont les mêmes valeurs de vérité. On note : $P \Leftrightarrow Q$.

Sa table de vérités est donnée par :

P	0	0	1	1
Q	0	1	0	1
$P \Leftrightarrow Q$	1	0	0	1

Il est clair que Si O, P et Q sont trois propositions logiques, alors : si O est équivalente à P et P équivalente à Q, alors O est équivalente à Q .

En établissant les tables de vérités des propositions $(P \Leftrightarrow Q)$ et $(\overline{P} \Leftrightarrow \overline{Q})$, on déduit que :

(1.1) $$(P \Leftrightarrow Q) \Leftrightarrow (\overline{P} \Leftrightarrow \overline{Q})$$

De même, la table de vérités de $\overline{\overline{P}}$ est la suivante :

P	0	1
$\overline{P}$	1	0
$\overline{\overline{P}}$	0	1

on voit qu'elle est identique à celle de P, par suite :

Proposition 1 *La négation de la négation d'une proposition logique P est équivalente à P, donc :*

$$\overline{\overline{P}} \Leftrightarrow P$$

Remarque 1 *Pour définir une proposition logique P, il suffit de donner les situations où elle est vraie, dans le reste des situations la proposition P étant fausse et inversement si on connaît les situations où P est fausse, dans le reste des situations P est vraie.*

1.2.3 La conjonction $\wedge$

Etant données deux propositions logiques P et Q, on appelle conjonction de P et Q, la proposition logique $P \wedge Q$ qui est vraie quand P et Q sont vraies à la fois. Sa table de vérités est donnée par :

$Q \backslash P$	0	1
0	0	0
1	0	1

ou

P	0	0	1	1
Q	0	1	0	1
$P \wedge Q$	0	0	0	1

Proposition 2 *Soit P une proposition logique, alors $P \wedge \overline{P}$ est une proposition fausse.*

Preuve : Pour montrer celà, il suffit de remarquer que la table de vérités de $P \wedge \overline{P}$ est la suivante :

P	0	1
$\overline{P}$	1	0
$P \wedge \overline{P}$	0	0

1.2.4 La disjonction $\vee$

Etant données deux propositions logiques P et Q, on appelle disjonction de P et Q, la proposition logique $P \vee Q$ qui est vraie si l'une des propositions logiques P ou Q est vraie. Sa table de vérités est donnée par :

$Q \backslash P$	0	1
0	0	1
1	1	1

ou

P	0	0	1	1
Q	0	1	0	1
$P \vee Q$	0	1	1	1

Proposition 3 *Soit P une proposition logique, alors la proposition $P \vee \overline{P}$ est toujours vraie.*

Preuve : Pour montrer celà, il suffit de remarquer que la table de vérités de $P \vee \overline{P}$ est la suivante :

P	0	1
$\overline{P}$	1	0
$P \vee \overline{P}$	1	1

1.2.5 Règles de De Morgan

Proposition 4 *(Règles de De Morgan)*[2,3] *Soient P et Q deux propositions logiques, alors :*

1. $\overline{P \wedge Q} \Leftrightarrow \overline{P} \vee \overline{Q}$.
2. $\overline{P \vee Q} \Leftrightarrow \overline{P} \wedge \overline{Q}$.

Preuve : On établit la preuve de ces règles en donnant les valeurs de vérités des propositions logiques correspondantes.

P	0	0	1	1
Q	0	1	0	1
$\overline{P}$	1	1	0	0
$\overline{Q}$	1	0	1	0
$\overline{P} \vee \overline{Q}$	1	1	1	0
$\overline{P} \wedge \overline{Q}$	1	0	0	0
$P \vee Q$	0	1	1	1
$\overline{P \vee Q}$	1	0	0	0
$P \wedge Q$	0	0	0	1
$\overline{P \wedge Q}$	1	1	1	0

On voit que les propositions logiques ($\overline{P \wedge Q}$) et ($\overline{P} \vee \overline{Q}$) ont les mêmes valeurs de vérité, donc elles sont équivalentes. De même pour ($\overline{P \vee Q}$) et ($\overline{P} \wedge \overline{Q}$).

1.2.6 L'implication $\Rightarrow$

Etant données deux propositions logiques P et Q, on note $((P \Rightarrow Q))$, la proposition logique qui est fausse si P est vraie et Q est fausse et vraie dans tous les autres cas.

Quand la proposition $(P \Rightarrow Q)$ est vraie, on dit que la proposition P implique la proposition Q.

De cette Définition, on obtient la table de vérités suivante :

$Q \backslash P$	0	1
0	1	0
1	1	1

ou

P	0	0	1	1
Q	0	1	0	1
$P \Rightarrow Q$	1	1	0	1

Etant données deux propositions logiques P et Q, alors la table de vérités de $Q \vee \overline{P}$ est la suivante :

2. Connues aussi sous l'appellation de : Loi de dualité .

3. De Morgan Auguste : Mathématicien britannique (Madurai Tamil Nadu (Inde) 1806 - Londres 1871). Il est le fondateur avec Boole de la logique moderne.

$Q \backslash P$	0	1
0	1	0
1	1	1

ou

P	0	0	1	1
$\overline{P}$	1	1	0	0
Q	0	1	0	1
$Q \vee \overline{P}$	1	1	0	1

On voit que cette table est identique à celle de $(P \Rightarrow Q)$, donc :
(1.2) $$(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (Q \vee \overline{P})$$

1.2.7 La contraposée.

Le travail des scientifiques consiste à établir à partir de certaines données ou hypothèses d'autres propriétés. Si on note P les données ou hypothèses qu'on a et Q les propriétés qu'on veut établir, alors tout revient à démontrer que $(P \Rightarrow Q)$ est vraie. Ce qui nous fait dire que la tâche des mathématiques consiste en la démonstration d'implications.

Dans certaines situations, il est difficile de montrer directement l'implication $(P \Rightarrow Q)$ alors on essaye de donner une autre proposition équivalente qui pourrait être plus facile à établir.

Proposition 5 *Etant données deux propositions logiques P et Q, alors les propositions suivantes sont équivalentes :*

- $(P \Rightarrow Q)$
- $(\overline{Q} \Rightarrow \overline{P})$

La deuxième implication est appelée Contraposée de la première implication.

Preuve : On donnera la preuve de cette équivalence de deux manières différentes.

1. En utilisant l'équivalence (1.2) on obtient :

$$\begin{aligned}
(\overline{Q} \Rightarrow \overline{P}) &\Leftrightarrow (\overline{P} \vee \overline{\overline{Q}}) \\
&\Leftrightarrow (\overline{P} \vee Q) \\
&\Leftrightarrow (Q \vee \overline{P}) \\
&\Leftrightarrow (P \Rightarrow Q)
\end{aligned}$$

donc : $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\overline{Q} \Rightarrow \overline{P})$

2. En utilisant les valeurs de vérité des implications $(P \Rightarrow Q)$ et $(\overline{Q} \Rightarrow \overline{P})$, on obtient :

P	0	0	1	1
Q	0	1	0	1
$P \Rightarrow Q$	1	1	0	1
$\overline{Q}$	1	0	1	0
$\overline{P}$	1	1	0	0
$\overline{Q} \Rightarrow \overline{P}$	1	1	0	1

d'où on déduit que : $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\overline{Q} \Rightarrow \overline{P})$.

1.2.8 La réciproque

Etant données P et Q deux propositions logiques, on appelle la réciroque de l'implication $(P \Rightarrow Q)$ la proposition $(Q \Rightarrow P)$

1.3 Propriétés des opérations logiques

Proposition 6 *Soient O, P et Q trois propositions logiques, alors*

1. $(P \wedge Q) \Leftrightarrow (Q \wedge P)$ (commutativité de $\wedge$)
2. $(P \vee Q) \Leftrightarrow (Q \vee P)$ (commutativité de $\vee$)
3. $P \Leftrightarrow (P \wedge P)$ (idempotence de $\wedge$)
4. $P \Leftrightarrow (P \vee P)$ (idempotence de $\vee$)
5. $(O \vee P) \vee Q \Leftrightarrow O \vee (P \vee Q)$ (Associativité de $\vee$)
6. $(O \wedge P) \wedge Q \Leftrightarrow O \wedge (P \wedge Q)$ (Associativité de $\wedge$)
7. $((O \vee P) \wedge Q) \Leftrightarrow (O \wedge Q) \vee (P \wedge Q)$ (Distributivité de $\wedge$ par rapport à $\vee$)
8. $((O \wedge P) \vee Q) \Leftrightarrow (O \vee Q) \wedge (P \vee Q)$ (Distributivité de $\vee$ par rapport à $\wedge$).

Preuve : On se limitera à la preuve des deux dernières propriétés. Les autres sont soit trop faciles, soit se démontrent de la même facon.

7. Dans le tableau suivant, on remarque que les propositions $[(O \vee P) \wedge Q]$ et $[(O \wedge P) \vee (O \wedge Q)]$ ont les mêmes valeurs de vérité.

O	0	0	0	0	1	1	1	1
P	0	0	1	1	0	0	1	1
Q	0	1	0	1	0	1	0	1
$O \wedge Q$	0	0	0	0	0	1	0	1
$P \wedge Q$	0	0	0	1	0	0	0	1
$(O \wedge Q) \vee (P \wedge Q)$	0	0	0	1	0	1	0	1
$O \vee P$	0	0	1	1	1	1	1	1
$(O \vee P) \wedge Q$	0	0	0	1	0	1	0	1

donc : $[(O \vee P) \wedge Q] \Leftrightarrow [(O \wedge P) \vee (O \wedge Q)]$.

8. De même, dans le tableau suivant on remarque que les propositions $[(O \wedge P) \vee Q]$ et $[(O \vee Q) \wedge (P \vee Q)]$ ont les mêmes valeurs de vérité.

O	0	0	0	0	1	1	1	1
P	0	0	1	1	0	0	1	1
Q	0	1	0	1	0	1	0	1
$O \wedge P$	0	0	0	0	0	0	1	1
$(O \wedge P) \vee Q$	0	1	0	1	0	1	1	1
$(O \vee Q)$	0	1	0	1	1	1	1	1
$(P \vee Q)$	0	1	1	1	0	1	1	1
$(O \vee Q) \wedge (P \vee Q)$	0	1	0	1	0	1	1	1

donc : $[(O \wedge P) \vee Q] \Leftrightarrow [(O \vee Q) \wedge (P \vee Q)]$.

Proposition 7 *Etant données deux propositions logiques P et Q, alors*

$$[P \Leftrightarrow Q] \Leftrightarrow [((P \Rightarrow Q)) \wedge (Q \Rightarrow P)]$$

Preuve : Comme :

$$[((P \Rightarrow Q)) \wedge (Q \Rightarrow P)] \Leftrightarrow (Q \vee \overline{P}) \wedge (P \vee \overline{Q})$$

en utilisant la table de vérités suivante :

P	0	0	1	1
Q	0	1	0	1
$\overline{P}$	1	1	0	0
$\overline{Q}$	1	0	1	0
$Q \vee \overline{P}$	1	1	0	1
$P \vee \overline{Q}$	1	0	1	1
$(Q \vee \overline{P}) \wedge (P \vee \overline{Q})$	1	0	0	1
$P \wedge Q$	0	0	0	1
$\overline{P} \wedge \overline{Q}$	1	0	0	0
$(P \wedge Q) \vee (\overline{P} \wedge \overline{Q})$	1	0	0	1
$P \Leftrightarrow Q$	1	0	0	1

on déduit que

$$[P \Leftrightarrow Q] \Leftrightarrow [(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)]$$

1.4 Les Ensembles

Définition 2 *On appelle ensemble E toute collection d'objets, appelés éléments de l'ensemble E. Si le nombre de ces objets est fini, ce nombre est appelé cardinal de E et on le note $card(E)$ ou $|E|$, si E possède une infinité d'éléments, on dit qu'il est de cardinal infini et on note $Card(E) = \infty$.*

Si un objet x est un élément de E, on dit que x appartient à E et on note $x \in E$. Si x n'est pas un élément de E, on note $x \notin E$.

Pour définir un ensemble,

– ou bien on connait la liste de tous ses éléments, on dit alors que l'ensemble est donné "par Extension",

– ou bien on connait seulement les relations qui lient les éléments et qui nous permettent de les retrouver tous, on dit alors que l'ensemble est donné par "Compréhension".

Pour représenter un ensemble E, on met les objets qui forment l'ensemble entre deux accolades.

– Soit A l'ensemble des étudiants de S1 (SMIA). On ne connait pas tous ces étudiants mais on peut bien les retrouver, donc A est un ensemble donné par compréhension.

– Soit $B = \{1, 3, a, y, \gamma, 2\}$. B est défini par extension, car on connait tous ses éléments. Le cardinal de B est égal à 6 ($\text{card}(B) = 6$).

– Soit $C = \{x \in R \ /x \geq 5\}$, C est un ensemble donné par compréhension.

– Il arrive de représenter un ensemble par un diagramme de Venn. [4]

L'un des axiomes de la théorie des ensembles, est que : Il existe un ensemble, appelé l'ensemble vide et noté $\emptyset$, qui ne contient aucun élément. On a alors $Card(\emptyset) = 0$.

Un ensemble contenant un seul élément est appelé "Singleton", donc de cardinal égal à 1.

1.4.1 Les quantificateurs

On utilise les symboles suivants :

1. $\exists$ le quantificateur existentiel. On écrit $\exists x$ pour lire "Il existe x".
2. $\forall$ le quantificateur universel. On écrit $\forall x$ pour lire "Pour tout x".
3. On écrit $\exists! x$ pour lire "Il existe un unique x".

En utilisant ces quantificateurs, pour un ensemble A on a :

$$\begin{array}{lll} - A = \emptyset & \Leftrightarrow & \forall x (x \notin A) \\ - A \text{ est un singleton} & \Leftrightarrow & \exists! x (x \in A \\ & \Leftrightarrow & \exists x (x \in A) \wedge \forall y (y \in A \Rightarrow y = x) \end{array}$$

1.4.2 Parties d'un ensemble

Définition 3 *On dit qu'un ensemble A est inclus dans un ensemble B, ou que A est une partie de l'ensemble B, ou que A est un sous ensemble de B si tout élément de A est un élément de B. On note $A \subset B$ et on a formellement*

$$A \subset B \Leftrightarrow \forall x \ (x \in A \Rightarrow x \in B)$$

Quand A n'est pas une partie de B, on note $A \subsetneq B$ et on a formellement :

$$A \subsetneq B \Leftrightarrow \exists x \ ((x \in A) \wedge (x \notin B))$$

L'ensemble de toutes les parties d' un ensemble A est noté $P(A)$.

Exemple 2 *Soit $A = \{a, b, 2\}$, alors $P(A) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{2\}, \{a, b\}, \{a, 2\}, \{b, 2\}, A\}$*

---

4. Venn John : mathématicien et logicien britannique, (Hull 1834 - Cambridge 1923). Célèbre pour avoir conçu ses diagrammes qu'il présenta en 1881, lesquels sont employés dans beaucoup de domaines, en théorie des ensembles, en probabilité, en logique, en statistique et en informatique. Elu membre de la Royal Society en 1883.

Proposition 8 *Soit A un ensemble, alors $\emptyset \in P(A)$ et $A \in P(A)$.*

Définition 4 *Soient A et B deux ensembles, on dit que A est égal à B, on note $A = B$, s'ils ont les mêmes éléments.*

Formellement on a :

$$\begin{aligned} A = B &\Leftrightarrow \forall x \; (x \in A \Leftrightarrow x \in B) \\ &\Leftrightarrow (A \subset B) \wedge (B \subset A) \end{aligned}$$

1.4.3 Opérations sur les ensembles

Définition 5 *Soient A et B deux ensembles.*

– On appelle intersection de A et B, l'ensemble, noté $A \cap B$, des éléments de A appartenant aussi à B.

– On appelle réunion de A et B, l'ensemble, noté $A \cup B$, des éléments de A et de ceux de B.

Formellement, on a :

$$\begin{aligned} A \cap B = \{x;\, (x \in A) \wedge (x \in B)\}. \\ A \cup B = \{x;\, (x \in A) \vee (x \in B)\}. \end{aligned}$$

Exemple 3 *Soient $A = \{a, c, 1, 5, \alpha, \gamma, 2\}$ et $B = \{\zeta, \eta, \gamma, a, x, z\}$, alors :*

$A \cap B = \{a, \gamma\}$ et $A \cup B = \{a, c, 1, 5, \alpha, \gamma, 2, \zeta, \eta, x, z\}$.

Proposition 9 *Soient A et B deux ensembles, alors*

– $(A \cap B \subset A) \wedge (A \cap B \subset B)$
– $(A \subset A \cup B) \wedge (B \subset A \cup B)$

Si $Z \in P(A)$, on note :

– ${}_{Y \in Z} Y = \{x;\, (\forall Y \in Z,\, x \in Y)\}$.
– ${}_{Y \in Z} Y = \{x;\, (\exists Y \in Z,\, x \in Y)\}$.

Définition 6 *Si $A \cap B = \emptyset$, on dit que A et B sont deux ensembles disjoints, et si de plus $E = A \cup B$, on dit que A est le complémentaire de B dans E, ou que A et B sont deux ensembles complémentaires dans E, et on note :*

$$A = \complement_E B \text{ ou } B = \complement_E A$$

On note aussi :

$$A = E \backslash B$$

En d'autres termes,

Soit E un ensemble et A une partie de E. On appelle complémentaire de A dans E l'ensemble $\complement_E A$ des éléments de E qui ne sont pas dans A. (on le note aussi A^c ou $\overline{A}$)

Formellement on a :

$$\complement_E A = \{x \in E;\ x \notin A\}$$

Avant de donner un exemple, on remarque que si E est un ensemble alors $\emptyset \subset E$ et $(\forall x \in E,\, x \notin \emptyset)$, donc : $\complement_E \emptyset = E$.

Exemple 4 *Soient* $E = \{1, a, \alpha, 3, l, \gamma, 2, \ell, \clubsuit, \spadesuit\}$ *et* $A = \{1, a, \alpha, \spadesuit\}$, *alors :*

$$\complement_E A = \{3, l, \gamma, 2, \ell, \clubsuit\}$$

Proposition 10 *Soient E un ensemble et A et B deux parties de E, alors :*

$$\begin{array}{lrcl} 1. & A \subset B & \Leftrightarrow & \complement_E B \subset \complement_E A. \\ 2. & \complement_E(\complement_E A) & = & A \\ 3. & \complement_E(A \cap B) & = & \complement_E A \cup \complement_E B \\ 4. & \complement_E(A \cup B) & = & \complement_E A \cap \complement_E B \end{array}$$

Preuve :

1. On a

$$\begin{array}{rcl} A \subset B & \Leftrightarrow & \forall x \in E (x \in A) \Rightarrow (x \in B) \\ & \Leftrightarrow & \forall x \in E (x \notin B) \Rightarrow (x \notin A) \text{ Contrapposée de l'implication} \\ & \Leftrightarrow & \forall x \in E ((x \in \complement_E B) \Rightarrow (x \in \complement_E A)) \\ & \Leftrightarrow & \complement_E B \subset \complement_E A \end{array}$$

donc

$$A \subset B \Leftrightarrow \complement_E B \subset \complement_E A.$$

2. Soit $x \in E$, alors

$$\begin{array}{rcl} x \in \complement_E(\complement_E A) & \Leftrightarrow & x \notin \complement_E A \\ & \Leftrightarrow & \overline{(x \in \complement_E A)} \\ & \Leftrightarrow & \overline{(x \notin A)} \\ & \Leftrightarrow & (x \in A) \end{array}$$

donc

$$\complement_E(\complement_E A) = A$$

.

3. Soit $x \in E$, alors

$$\begin{array}{rcl} x \in \complement_E(A \cap B) & \Leftrightarrow & x \notin A \cap B \\ & \Leftrightarrow & (x \notin A) \vee (x \notin B) \\ & \Leftrightarrow & (x \in \complement_E A) \vee (x \in \complement_E B) \\ & \Leftrightarrow & x \in (\complement_E A \cup \complement_E B) \end{array}$$

donc

$$\complement_E(A \cap B) = (\complement_E A \cup \complement_E B).$$

4. Soit $x \in E$, Alors

$$\begin{array}{rcl} x \in \complement_E(A \cup B) & \Leftrightarrow & x \notin A \cup B \\ & \Leftrightarrow & (x6 \in A) \wedge (x \notin B) \\ & \Leftrightarrow & (x \in \complement_E A) \wedge (x \in \complement_E B) \\ & \Leftrightarrow & x \in (\complement_E A \cap \complement_E B) \end{array}$$

donc

$$\complement_E(A \cup B) = (\complement_E A \cap \complement_E B).$$

De la première propriété on déduit que : $\complement_E E = \emptyset$.

Définition 7 *On appelle partition d'un ensemble E, toute famille $F \subset P(E)$ telle que :*

1. Les éléments de la famille F sont disjoints deux à deux, c'est à dire

$$\forall A, B \in F,\ A \cap B = \emptyset$$

2. La famille F recouvre l'ensemble E ou que F est un recouvrement de E, c'est à dire

$$_{A \in F} A = E$$

Proposition 11 *Soit E un ensemble, alors pour toute partie A de E, $F = \left\{\complement_E A, A\right\}$ est une partition de E.*

Exemple 5 *Soit* $E = \{1, a, \ell, 3, b, c, d, \alpha, \beta, \gamma\}$*, alors :*

$F = \{\{a, \gamma\}, \{d, \alpha, \beta\}, \{c, 1\}, \{3, \ell\}, \{b\}\}$ est une partition de l'ensemble E.

Définition 8 *Soient A et B deux ensembles non vides, on note $A \times B$ l'ensemble des couples ordonnés (x, y) tels que $x \in A$ et $y \in B$. Il est appelé produit cartésien*[5] *des ensembles A et B.*

On convient que

$$\forall (x, y), (x', y') \in A \times B, \ (x, y) = (x', y') \Leftrightarrow (x = x') \wedge (y = y').$$

Exemple 6 *Soient* $A = \{1, 5, 2\}$ *et* $B = \{A, \alpha, \clubsuit, \heartsuit\}$*, alors*

$$A \times B = \{(1, a), (5, a), (2, a), (1, \alpha), (5, \alpha), (2, \alpha), (1, \clubsuit), (5, \clubsuit), (2, \clubsuit), (1, \heartsuit), (5, \heartsuit), (2, \heartsuit)\}$$
$$B \times A = \{(a, 1), (a, 5), (a, 2), (\alpha, 1), (\alpha, 5), (\alpha, 2), (\clubsuit, 1), (\clubsuit, 5), (\clubsuit, 2), (\heartsuit, 1), (\heartsuit, 5), (\heartsuit, 2)\}$$

Remarque 2 $A \times B = B \times A$ *si et seulement si* $A = B$.

1.5 Quelques formes de raisonnement logique

Un raisonnement logique est une manière d'arriver à une conclusion en partant d'une (ou de plusieurs) hypothése(s), et en utilisant les régles de déduction d'une proposition à partir d'une autre. Vous connaissez déjà le raisonnement par équivalence qui consiste, à partir d'une proposition vraie (l'hypothése par exemple), construire par équivalence d'autres propositions (qui sont donc vraies), dont la derniére est la conclusion.

Voici trois autres formes de raisonnement qui découlent des régles de logique précédentes.

5. (3) DESCARTES René : Philosophe, physicien et mathématicien français (La Haye 1596-Stockholm 1650). Il créa l'algèbre des polynômes, avec Fermat il fonda la géométrie analytique. Ennonça les propriétés fondamentales des équations algébriques et simplifia les notations algébriques en adoptant les premières lettres de l'alphabet pour désigner les constantes et les dernières lettres pour désigner les variables. Publia "Le Discours de la méthode", qui est une référence pour le raisonnement logique. Découvrit aussi les principes (régles) de l'optique géométrique.

1.5.1 Raisonnement à partir de la contraposée

La proposition 1.2 vue au début donne une autre manière de démontrer que $P \Rightarrow Q$. En effet il est équivalent de montrer que $\overline{Q} \Rightarrow \overline{P}$, c'est-à-dire que si la proposition Q est fausse alors la proposition P est fausse, ce qui est parfois plus simple. C'est ce que l'on appelle un raisonnement par contraposée.

Exemple 7 *Un premier exemple emprunté à Racine est : 'Si Titus est jaloux, alors il est amoureux'. En effet, s'il n'est pas amoureux, il n'a aucune raison d'être jaloux !*

Exemple 8 *Un deuxième exemple mathématique : Si n est un entier impair alors le chiffre des unités de n est impair. On va montrer la contraposée, à savoir : (Si le chiffre des unités de n est pair) alors n est pair.*

En effet, si le chiffre des unités de n est pair, on peut écrire $n = 10q+2p$ soit $n = 2(5q+p)$ c'est-à-dire n est pair.

Attention La proposition $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\overline{P} \Rightarrow \overline{Q})$ est fausse!. Elle peut conduire à de nombreuses erreurs, par exemple la suivante : étant donné que tout homme est mortel, l'équivalence précédente pourrait servir à prouver que toute vache est immortelle.

1.5.2 Raisonnement par l'absurde

Le principe du raisonnement par l'absurde est le suivant : pour démontrer qu'une proposition R est vraie, on suppose le contraire (c'est-à-dire R fausse), et on essaye d'arriver à un résultat faux (absurde).

Exemple 9 *Pour montrer qu'il n'existe pas de plus petit réel strictement positif, on va supposer qu'il en existe un, noté a (donc $0 < a$ est tel qu'il n'existe aucun réel x tel que $0 < x < a$). Or le réel $a/2$ est tel que $0 < a/2 < a$, ce qui contredit l'hypothèse.*

On peut appliquer ce principe par exemple à la proposition $(P \Rightarrow Q)$, notée R. On a vu précédement que $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (Q \vee \overline{P})$ et que $\overline{(Q \vee \overline{P})}$ est équivalente à $(\overline{Q} \wedge P)$. On peut donc montrer l'implication $(P \Rightarrow Q)$ en montrant que $(\overline{Q} \wedge P)$ est fausse. Plus précisément on suppose que P est vraie et Q est fausse et l'on démontre que cela aboutit à un résultat faux.

Exemple 10 *Pour montrer que, n étant un entier, (n impair) $\Rightarrow$ (le chiffre des unités de n est impair), on va supposer à la fois que n est impair et que le chiffre de ses unités est pair, ce qui donne :*

$n = 2m + 1 = 10q + 2p$, donc $1 = 2(5q + p - m)$ ce qui est impossible puisque 1 est impair !

1.5.3 Raisonnement par récurrence

Soit $P(n)$ une proposition dépendant de n. $n \in \mathbb{N}$

Proposition 12 *S'il existe un entier n_0 tel que $P(n_0)$ est vraie et si pour tout entier n, $n \geq n_0$; $P(n)$ entraine $P(n+1)$ alors pour tout entier n, $n \geq n_0$; $P(n)$ est vraie.*

Preuve : On va effectuer un raisonnement par l'absurde : notons

$$A = \{n \geq n_0 : P(n) \text{ est faux}\},$$

et supposons A non vide.

$A \subset \mathbb{N}$, donc A a un plus petit élément que nous noterons n_1. On a donc $n_1 - 1 \notin A$ et, de plus, $n_1 > n_0$ car, par hypothèse, $P(n_0)$ est vrai ; on a donc $n_1 - 1 \geq n_0$. Mais $n_1 - 1 \notin A$ signifie $P(n_1 - 1)$ vrai, donc, par hypothèse sur P, $P(n_1)$ est vrai ; d'où une contradiction avec le fait que $n_1 \in A$. Donc A est vide.

Exemple 11 *On va montrer* $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum\limits_{p=1}^{n} p^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

On note $P(n) : \sum\limits_{p=1}^{n} p^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

1. Pour $n = 1$; $\frac{1(1+1)(2+1)}{6} = 1 = 1^2$ d'où $P(1)$ est vrai

2. On suppose $P(n)$ vrai. Alors

$$\sum_{p=1}^{n+1} p^2 = \sum_{p=1}^{n} p^2 + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2$$
$$= \frac{(n+1)((n+1)+1)(2(n+1)+1)}{6}$$

Soit $\forall n \in \mathbb{N}^*$; $P(n) \Rightarrow P(n+1)$

d'où le résultat c-à-d :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{p=1}^{n} p^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

1.6 Quantificateurs et propositions logiques

1.6.1 Proposition dépendant d'une variable : $P(x)$

Si P est une proposition dont l'énoncé dépend de la valeur d'une variable x on peut la noter $P(x)$ et considérer les cas particuliers $P(a)$ où a est une valeur particulière de x.

Par exemple, soit dans $\mathbb{R}$ la proposition suivante $P(x) : x^2 - 1 < 0$. Alors $P(2)$ est fausse et $P(0)$ est vraie, et plus généralement $P(x)$ est vraie pour toutes les valeurs de x appartenant à $]-1, +1[$.

Soit E un ensemble, P une propriété dépendant d'une variable x de E, on est souvent amené à considérer l'ensemble des éléments a de E tels que P(a) soit vraie (on dit aussi, les a qui vérifient la propriété P). On le note

$$A_P = \{x \in E;\ P(x)\}$$

A_P est appelé l'ensemble de verité de P

1.6.2 Quantificateur universel : $\forall$

Pour exprimer qu'une propriété $P(x)$ est vraie pour tous les éléments x d'un ensemble de E, on écrit :

$$\forall\ x \in E,\ P(x)$$

(La virgule dans cette phrase peut être remplacée par un autre signe séparateur, couramment le point-virgule (;) ou le trait vertical (|)).

Si on reprend la notation A_P définie précédemment, on a alors :

$$\{(\forall x \in E, P(x))\} \Leftrightarrow A_P = E$$

- $\forall x \in \mathbb{R};\ x^2 \geq 0$
- $\forall x \in [2; +\infty[;\ x^2 - 4 \geq 0$
- $E \subset F$ s'écrit : $\forall x \in E;\ x \in F$

Proposition 13 *On a l'équivalence suivante :*

$$\forall x \in E; (P(x) \text{ et } Q(x)) \Leftrightarrow ((\forall a \in E; P(a)) \text{ et } (\forall b \in E; Q(b)))$$

Preuve : En effet $P(x)$ et $Q(x)$ sont vraies pour tout élément de E est bien équivalent à $P(x)$ est vraie pour tout élément de E et $Q(x)$ est vraie pour tout élément de E.

On peut également démontrer cette proposition avec les ensembles, en effet :

$$\begin{array}{rcl} \forall x \in E; (P(x) \text{ et } Q(x)) & \Leftrightarrow & A_P \cap A_Q = E \\ & \Leftrightarrow & (A_P = E \ \text{ et } A_Q = E) \\ & \Leftrightarrow & ((\forall a \in E; P(a)) \text{ et } (\forall b \in E; Q(b))) \end{array}$$

1.6.3 Quantificateur existentiel : $\exists$

Pour exprimer qu'une propriété $P(x)$ est vérifiée pour au moins un élément x d'un ensemble E, on écrit :

$$\exists x \in E,\ P(x)$$

qui se traduit par : 'il existe x appartenant à E tel que $P(x)$ est vraie'.

S'il existe un unique élément x de E tel que $P(x)$ est vraie, on écrira

$$\exists! x \in E,\ P(x)$$

Par exemple $\exists x \in \mathbb{R};\ x^2 = 1$, mais $\exists ! x \in \mathbb{R};\ x^2 = 1$ est fausse.
Par contre, vous pouvez écrire

$$\exists ! x \in \mathbb{R}^+;\ x^2 = 1$$

La propriété $(\exists x \in E,\ P(x))$ se traduit par $A_P \neq \varnothing$.

Proposition 14 *On a l'équivalence suivante :*

$\exists x \in E;\ ((P(x) \text{ ou } Q(x)) \Leftrightarrow (\exists a \in E;\ P(a)) \text{ ou } (\exists b \in E;\ Q(b))$
Preuve :
Cette proposition peut être démontrée en utilisant les ensembles de vérité, en effet
$\exists x \in E; ((P(x) \text{ ou } Q(x)) \Leftrightarrow (A_P \neq \emptyset) \text{ ou } (A_Q \neq \emptyset)$
$\Leftrightarrow (\exists a \in E; P(a)) \text{ ou } (\exists b \in E; Q(b))$.

1.6.4 Quantificateurs multiples

Il s'agit simplement de successions de $\forall$ et $\exists$. Mais il faut faire très attention à l'ordre dans lequel on les écrit. Par contre on a le résultat évident suivant :

Proposition 15 *Deux quantificateurs de même nature qui se suivent peuvent être échangés*

Par exemple

$$\forall x \in \mathbb{R}; \forall y \in \mathbb{R};\ x^2 + y^2 \geq 0 \Leftrightarrow \forall y \in \mathbb{R}; \forall x \in \mathbb{R};\ x^2 + y^2 \geq 0$$

De même

$$\exists x \in \mathbb{R}; \exists y \in \mathbb{R};\ x + y = 0 \Leftrightarrow \exists y \in \mathbb{R}; \exists x \in \mathbb{R};\ x + y = 0.$$

Proposition 16 *On a les équivalences suivantes :*

$$\begin{aligned} \overline{(\forall x \in E;\ P(x)})) &\Leftrightarrow (\exists a \in E;\ \overline{P(a)}) \\ \overline{(\exists a \in E; Q(a))} &\Leftrightarrow (\forall x \in E;\ \overline{Q(x)}) \end{aligned}$$

Preuve : La négation de la proposition : (P est vérifiée pour tout élément de E) est : (il existe au moins un élément de E pour lequel la proposition P est fausse). Ce qui s'exprime mathématiquement par :

$$\overline{(\forall x \in E;\ P(x)}) \Leftrightarrow (\exists a \in E;\ \overline{P(a)})$$

On peut démontrer aussi cette proposition avec les ensembles de vérité :

$$\begin{aligned} \overline{(\forall x \in E;\ P(x))} &\Leftrightarrow \overline{(A_P = E)} \\ &\Leftrightarrow A_P \neq E \\ &\Leftrightarrow (\exists a \in E; \overline{P(a)}) \end{aligned}$$

La deuxième proposition n'est que la négation de cette première proposition. On obtient le resultat recherché en apellant Q la proposition $\overline{P}$.

Par exemple, la négation de $\forall x \in \mathbb{R};\ x > 0$ est $\exists a \in \mathbb{R};\ a \leq 0$.

Proposition 17 *Soient E et F deux ensembles et P une proposition dépendant de deux variables et à chaque couple d'éléments (a, b) du produit cartésien $E \times F$, on associe $P(a, b)$.*

Alors on a :

$$\overline{(\forall a \in E; \exists b \in F; P(a;b))} \Leftrightarrow (\exists a \in E; \forall b \in F; \overline{P(a;b)})$$

Preuve : C'est une application directe de la proposition précédente.

Attention ! $\exists x$; $\forall y$ n'a pas le même sens que $\forall y$; $\exists x$.

Exemple 12 $\forall x \in \mathbb{R}$ *;* $\exists y \in \mathbb{R},\ x + y \geq 0 \not\Leftrightarrow \exists y \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R},\ x + y \geq 0$

En effet la proposition de gauche est vraie tandis que celle de droite est fausse !

1.7 Applications et fonctions

Définition 9 *On appelle application d'un ensemble E dans un ensemble F, toute correspondance f entre les éléments de E et ceux de F qui à tout élément $x \in E$ fait correspondre un unique élément $y \in F$ noté $f(x)$.*

– $y = f(x)$ est appelé image de x et x est un antécédant de y.
– On représente l'application f de E dans F par $f : E \longrightarrow F$.

E est appelé ensemble de départ et F l'ensemble d'arrivée de l'application f.

Une correspondance entre E et F est représentée par : $f : E \rightsquigarrow F$

Une application f entre E et F est aussi représentée par :

$$\begin{array}{rccc} f: & E & \longrightarrow & F \\ & x & \longrightarrow & f(x) \end{array}$$

Formellement, une correspondance f entre deux ensembles non vides est une application si et seulement si :

$$\forall x, x' \in E \quad (x = x') \Longrightarrow (f(x) = f(x')).$$

Exemple 13 *L'application $Id_E : E \longrightarrow E$ telle que*

$$\forall x \in E, \ \ Id_E(x) = x$$

est appelée application identité sur E.

Exemple 14 *Soient E et F deux ensembles non vides et a un élément de F, alors la correspondance f de E dans F définie par :*

$$\forall x \in E, \quad f(x) = a$$

est une application dite application constante.

Définition 10 *On dit que deux applications f et g sont égales si :*

1. Elles ont un même ensemble de départ E et un même ensemble d'arrivée F.
2. $\forall x \in E$, $f(x) = g(x)$.

On considère les applications suivantes :

$$\begin{array}{llll} f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} & g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+ & h : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R} & k : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ \quad x \longrightarrow x^2 & \quad x \longrightarrow x^2 & \quad x \longrightarrow x^2 & \quad x \longrightarrow x^2 \end{array}$$

alors :
$f \neq g$, car elles n'ont pas le même ensemble d'arrivée.
$f \neq h$, car elles n'ont pas le même ensemble de départ.
$f \neq k$, car elles n'ont ni le même ensemble de départ ni le même ensemble d'arrivée.

Définition 11 *On appelle graphe d'une application $f : E - \longrightarrow F$, l'ensemble*

$$\Gamma_f = \{(x, f(x)), \, x \in E\}$$

En fait, la définition d'une application f revient à la donnée d'un sous ensemble Γ_f de $E \times F$ tel que

$$\forall (x, y), (x', y') \in \Gamma_f \qquad ((x, y) = (x', y') \Leftrightarrow x = x')$$

1.7.1 Composition d'applications

Définition 12 *Soient $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$, on note gof l'application de E dans G définie par :*

$$\forall x \in E, \, gof(x) = g(f(x))$$

Cette application [6] est appelée composée des applications f et g.

Exemple 15 *Etant données les applications :*

$$\begin{array}{lcl} f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+ & \text{et} & g : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ \quad x \longrightarrow x^2 & & \quad x \longrightarrow x + 1 \end{array}$$

alors

$$\begin{array}{ll} gof : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+ & \text{et } \ gof(x) = g(x^2) = x^2 + 1 \\ fog : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+ & \text{et } \ fog(x) = f(x+1) = (x+1)^2 \end{array}$$

Il est clair que $fog \neq gof$.

6. gof est une application car pour $x, x' \in E$, si $x = x'$ alors $f(x) = f(x')$ car f est une application et comme g est une application alors $g(f(x)) = g(f(x'))$, donc $gof(x) = gof(x')$.

1.7.2 Restriction et prolongement d'une application

Définition 13 *Etant donnée une application $f : E \longrightarrow F$.*

1. On appelle restriction de f à un sous ensemble non vide X de E, l'application $g : X \longrightarrow F$ telle que

$$\forall x \in X, \qquad g(x) = f(x)$$

On note $g = f_{/X}$.

2. Etant donné un ensemble G tel que $E \subset G$, on appelle prolongement de l'application f à l'ensemble G, toute application h de G dans F telle que f est la restriction de h à E.

D'après cette définition, f est un prolongement de $f_{/X}$ à E.

Remarque 3 *Si F n'est pas un singleton, alors le prolongement de f n'est pas unique.*

Exemple 16 *Etant donnée l'application*

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^+ &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longrightarrow logx \end{aligned}$$

alors

$g : \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longrightarrow log|x| \end{array}$ et $h : \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longrightarrow log(2|x| - x) \end{array}$

sont deux prolongements différents de f à IR.

1.7.3 Images et images réciproques

Définition 14 *Soient $A \subset E$ et $M \subset F$.*

1. On appelle image de A par f, l'ensemble des images des éléments de A noté :

$$f(A) = \{f(x),\, x \in A\} \subset F$$

2. On appelle image réciproque de M par f, l'ensemble des antécédents des éléments de M, noté :

$$f^{-1}(M) = \{x \in E,\, f(x) \in M\} \subset E$$

Formellement on a :

$$\begin{array}{l} \forall y \in F, y \in f(A) \Leftrightarrow \exists x \in A, y = f(x) \\ \forall x \in E, x \in f^{-1}(M) \Leftrightarrow f(x) \in M \end{array}$$

Remarque 4 *Etant données deux applications $f : E \longrightarrow F$ et $g : F^{'} \longrightarrow G$, alors on peut définir l'application composée $gof : E- \longrightarrow G$, si $f(E) \subset F'$.*

Exemple 17 *Soient*

$f : \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longrightarrow x^2 \end{array}$ et $h : \begin{array}{l} \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longrightarrow logx \end{array}$

alors hof est définie par :

$$hof : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longrightarrow log\ x^2$$

1.7.4 Applications injectives, surjectives, bijectives

Définition 15 *On dit que :*

1. f est injective si tout élément de F possède au plus un antécédant.
2. f est surjective si tout élément de F possède au moins un antécédant.
3. f est bijective si elle est injective et surjective

La première propriété est équivalente à dire que deux éléments distincts de E ne peuvent pas être des antécédents d'un même élément de F, ce qui revient formellement à :

$$f \text{ injective} \Leftrightarrow \forall x, x^{'} \in E, \ (x \neq x^{'} \Rightarrow f(x) \neq f(x^{'}))$$

En prenant la contrapposée de l'implication, dans la deuxième proposition de cette équivalence, on obtient :

$$f \text{ injective} \quad \Leftrightarrow \quad \forall x, x^{'} \in E, (f(x) = f(x^{'}) \Rightarrow x = x^{'})$$

De même

$$f \text{ surjective} \quad \Leftrightarrow \quad \forall y \in F, \exists x \in E, f(x) = y$$

d'où on déduit :

$$f \text{ bijective} \quad \Leftrightarrow \quad \forall y \in F, \exists ! x \in F, f(x) = y$$

Proposition 18 *Une application $f : E \longrightarrow F$ est bijective si et seulement si il existe une unique application $g : F \longrightarrow E$ telle que*

$$fog = Id_F \qquad \text{et} \qquad gof = Id_E.$$

On dit que f est inversible et g, notée f^{-1}, est appelée "l'application réciproque" ou "l'application inverse" de f.

Preuve :

I.) Supposons qu'il existe une application $g : F \longrightarrow E$ telle que

$$fog = Id_F \qquad \text{et} \qquad gof = Id_E$$

Montrons que f est bijective.

1. Soit $y \in F$, comme $fog = Id_F$ alors $fog(y) = y$, par suite il existe $x = g(y) \in E$ tel que $f(x) = y$, ce qui montre que f est surjective.

2. Soient $x, x^{'} \in E$, comme $gof = Id_E$ alors $gof(x) = x$ et $gof(x^{'}) = x^{'}$, par suite :

$$\begin{aligned} f(x) = f(x^{'}) &\Rightarrow g(f(x)) = g(f(x^{'})) \text{ car } g \text{ est une application} \\ &\Rightarrow gof(x) = gof(x^{'}) \\ &\Rightarrow x = x^{'} \qquad \text{car } fog = Id_F \text{ et } gof = Id_E \end{aligned}$$

ce qui montre que f est injective.

De 1. et 2. on déduit que f est bijective.

II.) Supposons que f est bijective.

Construisons l'unique application $g : F \longrightarrow E$ telle que

$$fog = Id_F \text{ et } gof = Id_E.$$

f étant bijective, alors : $\forall y \in F, \exists ! x \in E; \ y = f(x)$.

Ainsi, à tout élément $y \in F$, on fait associer un unique élément $x \in E$, qu'on notera $g(x)$, tel que $f(x) = y$. On définit ainsi une application

$$\begin{aligned} g : F &\longrightarrow E \\ y &\longrightarrow g(y) = x \end{aligned}$$

Montrons que $fog = Id_F$ et $gof = Id_E$.

1. Soit $y \in F$, alors $g(y) = x$, avec $f(x) = y$, donc

$$fog(y) = f(g(y) = f(x) = y,$$

ce qui montre que : $fog = Id_F$.

2. Soit $x \in E$, alors pour $y = f(x)$ on a $g(y) = x$, par suite

$$gof(x) = g(f(x) = g(y) = x,$$

ce qui montre que : $gof = Id_E$.

3. Montrons l'unicité de g. Soit $g_1 : F \longrightarrow E$ vérifiant les deux propriétés précédentes, alors pour tout $y \in F$, il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$, donc
$g_1(y) = g_1(f(x)) = g_1of(x) = Id_E(x) = gof(x) = g(f(x)) = g(y)$
ce qui montre que $g_1 = g$.

Exemple 18 *On considère l'application*

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}\backslash\{2\} &\longrightarrow F \\ x &\longrightarrow \tfrac{x+5}{x-2} \end{aligned}$$

avec F un sous ensemble de $\mathbb{R}$.

Déterminer F pour que l'application f soit bijective et donner l'application inverse de f.

Montrer que f est bijective revient à examiner l'existence de solution de l'équation $y = f(x)$, pour tout $y \in F$.

Soit $y \in F$, alors

$$\begin{aligned} y = f(x) &\Leftrightarrow y = \tfrac{x+5}{x-2} \\ &\Leftrightarrow y(x-2) = x+5 \\ &\Leftrightarrow yx - x = 5 + 2y \\ &\Leftrightarrow x(y-1) = 5 + 2y \\ &\Leftrightarrow x = \tfrac{5+2y}{y-1} \quad \text{si } y \neq 1 \end{aligned}$$

ce qui montre que :

$$\forall y \in \mathbb{R}\backslash\{1\}, \exists! x \ / \ x = \tfrac{5+2y}{y-1}; \ y = f(x)$$

Pour montrer que f est bijective, il reste à voir si $x = \frac{5+2y}{y-1} \in \mathbb{R}\backslash\{2\}$.

On a :

$$\begin{aligned} \tfrac{5+2y}{y-1} = 2 &\Leftrightarrow 5 + 2y = 2(y-1) \\ &\Leftrightarrow 5 = -2 \text{ ce qui est impossible} \end{aligned}$$

ce qui montre que $\frac{5+2y}{y-1} \in \mathbb{R}\backslash\{2\}$, par suite :

$$\forall y \in \mathbb{R}\backslash\{1\}, \exists! x = \tfrac{5+2y}{y-1} \in \mathbb{R}\backslash\{2\}; \qquad y = f(x)$$

donc f est bijective si $F = \mathbb{R}\backslash\{1\}$ et l'inverse de f est :

$$f^{-1} : \mathbb{R}\backslash\{1\} \longrightarrow \mathbb{R}\backslash\{2\}, \quad y \longrightarrow \tfrac{5+2y}{y-1}$$

Remarque 5 *Il est clair que si f est bijective, il en est de même de f^{-1} et on a : $(f^{-1})^{-1} = f$.*

On dit que f est une bijection entre E et F et que E et F sont deux ensembles équipotents.

Proposition 19 *Soient $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$, alors*

1. $(f$ injective $) \wedge (g$ injective $) \Rightarrow (gof$ injective $)$.
2. $(f$ surjective $) \wedge (g$ surjective $) \Rightarrow (gof$ surjective $)$.
3. $(f$ bijective $) \wedge (g$ bijective $) \Rightarrow (gof$ bijective et $(gof)^{-1} = f^{-1}og^{-1})$.

Preuve : On a $gof : E \longrightarrow G$.

1. Supposons f et g injectives et montrons que gof est injective.

Soient $x, x' \in E$, alors :

$$\begin{aligned} x \neq x' &\Rightarrow f(x) \neq f(x') \text{ car } f \text{ injective} \\ &\Rightarrow g(f(x)) \neq g(f(x')) \text{ car } g \text{ injective} \\ &\Rightarrow gof(x) \neq gof(x') \end{aligned}$$

ce qui montre que gof est injective.

2. Supposons f et g surjectives et montrons que gof est surjective.

Soit $z \in G$, g étant surjective, il existe $y \in F$ tel que $z = g(y)$, comme $y \in F$ et f est surjective alors il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$, donc $z = g(f(x))$ et on déduit que :

$$\forall z \in G, \exists x \in E; \;\; z = gof(x)$$

ce qui montre que gof est surjective.

3. De 1. et 2. on déduit que si f et g sont bijectives alors gof est bijective.

Montrons que $(gof)^{-1} = f^{-1}og^{-1}$.

D'après 2. , pour $z \in G$, $z = g(y)$, $y = f(x)$ et $z = gof(x)$, comme f, g et gof sont bijectives, alors $y = g^{-1}(z)$, $x = f^{-1}(y)$ et $x = (gof)^{-1}(z)$, par suite

$$\forall z \in G, \qquad (gof)^{-1}(z) = x = f^{-1}(y) = f^{-1}(g^{-1}(z) = f^{-1}og^{-1}(z)$$

donc : $(gof)^{-1} = f^{-1}og^{-1}$.

Remarque 6 *Les réciproques des implications de la proposition précédente ne sont pas vraies. Pour s'en convaincre il suffit de prendre l'exemple suivant.*

Etant données les applications suivantes :

$$\begin{array}{ccc} f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} & \text{et} & g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longrightarrow exp(x) & \text{et} & x \longrightarrow ln(|x|) \end{array}$$

alors

$$\begin{aligned} gof : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longrightarrow x \end{aligned}$$

est injective malgré que g ne le soit pas et gof est surjective malgré que f ne le soit pas.

1.7.5 Fonctions

Définition 16 *On appelle fonction de E dans F, toute application f d'un sous ensemble $D_f \subset E$ dans F. D_f est appelé "ensemble de définition de f". ou "domaine de définition de f"*

Remarque 7 *Toutes les notions données pour les applications peuvent être adaptées pour les fonctions.*

1.8 Relations binaires

Définition 17 *Soient E et F deux ensembles. On dit que R est une relation binaire si elle correspond à une propriété caractéristique des éléments d'une partie Γ de $E \times F$.*

Γ est appelé le graphe de la relation R.

Autrement dit : Dire que $(x;y) \in \Gamma$ correspond à "x et y vérifient la relation R" ce qui sera noté xRy.

Donc

$$\Gamma = \{(x;y) \in E \times F : xRy\}$$

Exemple 19 *Soit $E = F = \{1,2,3\}$; et $R =$ "$<$ " : Nous avons $1 < 2$; $1 < 3$; $2 < 3$ donc $\Gamma = \{(1,2),(1,3),(2,3)\}$*

Si $E = F$; on dit que R est une relation binaire définie sur E.

Définition 18 *Etant donnée une relation binaire R sur l'ensemble non vide E, on dit que :*

1. R est Reflexive $\Leftrightarrow \forall x \in E \ (xRx)$,
2. R est Transitive $\Leftrightarrow \forall x,y,z \in E \quad [((xRy) \wedge (yRz)) \Rightarrow (xRz)]$
3. R est Symétrique $\Leftrightarrow [\forall x,y \in E \quad (xRy) \Rightarrow (yRx)]$
4. R est Anti-Symétrique $\Leftrightarrow [\forall x,y \in E \quad ((xRy) \wedge (yRx)) \Rightarrow (x = y)]$

1.8.1 Relations d'équivalence

Définition 19 *On dit qu'une relation binaire R sur un ensemble E est une relation d'équivalence si elle est Réflexive, Symétrique et Transitive.*

Définition 20 *Soit R une relation d'équivalence sur un ensemble E.*

– On dit que deux éléments x et $y \in E$ sont équivalents si xRy.

– On appelle classe d'équivalence d'un élément $x \in E$, l'ensemble : $\dot{x} = \{y \in E;\ xRy\}$.

– x est dit un représentant de la calsse d'équivalence $\dot{x}$.

– On appelle ensemble quotient de E par la relation d'équivalence R, l'ensemble des classes d'équivalence de tous les éléments de E. Cet ensemble est noté E/R.

– L'application s de E dans E/R telle que pour tout $x \in E$, $s(x) = \dot{x}$, est appelée "surjection canonique" de E sur E/R.

Exemple 20 *Etant donné E un ensemble non vide, alors*

L'egalité est une relation d'équivalence dans E

Exemple 21 *Soit $n \in \mathbb{Z}$, on définit dans $\mathbb{Z}$ la relation R par :*

$$\begin{aligned} \forall x, y \in \mathbb{Z},\ xRy &\Leftrightarrow x - y \text{ est un multiplede } n \\ &\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}; x - y = kn \end{aligned}$$

Montrons que R est une relation d'équivalence et donnons l'ensemble quotient $\mathbb{Z}/R$.
1. R est une relation d'équivalence.
i) R est une relation Réflexive, car on a :

$$\forall x \in \mathbb{Z},\ x - x = 0.n, \text{ donc } \forall x \in \mathbb{Z},\ xRx$$

ce qui montre que R est une relation Réflexive.
ii) R est une relation Symétrique, car on a :

$$\begin{aligned} \forall x, y \in \mathbb{Z}, xRy &\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}; x - y = kn \\ &\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}; y - x = (-k)n \\ &\Leftrightarrow \exists k' \in \mathbb{Z}; x - y = k'n \quad (k' = -k) \\ &\Leftrightarrow yRx \end{aligned}$$

donc $\forall x, y \in \mathbb{Z},\ xRy \Leftrightarrow yRx$
ce qui montre que R est une relation Symétrique.
iii) R est une relation Transitive, car on a :

$$\begin{aligned} \forall x, y, z \in \mathbb{Z}, (xRy) \wedge (yRz) &\Rightarrow (\exists k \in \mathbb{Z}; x - y = kn) \wedge (\exists k' \in \mathbb{Z}; y - z = k'n) \\ &\Rightarrow (\exists k'' \in \mathbb{Z}; x - z = k''n).\ (k'' = k + k') \\ &\Rightarrow (xRz) \end{aligned}$$

donc

$$\forall x,\ y,\ z \in \mathbb{Z},\ (xRy) \wedge (yRz) \Rightarrow (xRz)$$

ce qui montre que R est une relation Transitive.
De i) , ii) et iii) , on déduit que R est une relation déquivalence.
2. Déterminons l'ensemble quotient $\mathbb{Z}/R$.
Soit $x \in \mathbb{Z}$, alors :

$$\begin{aligned} \forall y \in \mathbb{Z},\ xRy &\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}; x - y = kn \\ &\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}; y = x - kn \\ &\Leftrightarrow \exists k' \in \mathbb{Z}; y = x + k'n \end{aligned}$$

donc :

$$\dot{x} = \{x,\ x + kn, k \in \mathbb{Z}\ \},$$

On montrera plus tard que $\mathbb{Z}/R = \left\{\dot{0}, \dot{1}, \dot{2}, ..., \dot{n-1}\right\} = \{k\mathbb{Z}, 1 + k\mathbb{Z}, ..., (k-1) + k\mathbb{Z}\}$
Remarque : $\mathbb{Z}/R$ est noté $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

Exemple 22 *Soient E et F deux ensembles non vides et $f : E \longrightarrow F$, on définit la relation binaire R sur E par :*

$$\forall x, y \in E, xRy \Leftrightarrow f(x) = f(y)$$

alors R est une relation d'équivalence sur E.

Preuve :

1. R est réflexive, car f étant une application alors : $\forall x \in E$, $f(x) = f(x)$, donc $\forall x \in E$, xRx.

2. R est transitive, car pour tous $x, y, z \in E$ on a : $f(x) = f(y)$ et $f(y) = f(z) \Rightarrow f(x) = f(z)$

ce qui montre que : $\forall x, y, z \in E$, $(xRy) \wedge (yRz) \Rightarrow (xRz)$.

3. R est symétrique, car pour tous $x, y \in E$, $f(x) = f(y) \Rightarrow f(y) = f(x)$

donc $\forall x, y \in E$, $(xRy) \Rightarrow (yRx)$

ce qui montre que la relation binaire R est une relation d'équivalence.

Proposition 20 *Soit R une relation d'équivalence sur un ensemble non vide E, alors*

$$\forall x, y \in E, (\dot{y} \cap \dot{x} = \emptyset) \vee ((\dot{y} = \dot{x})$$

Preuve : Soient $x, y \in E$, supposons que $\dot{y} \cap \dot{x} \neq \emptyset$ alors il existe $z \in \dot{y} \cap \dot{x}$, donc zRy et zRx.

Montrons alors que $\dot{y} = \dot{x}$.

Soit $u \in \dot{x}$, alors $(uRx) \wedge (zRx) \wedge (zRy)$

comme R est symétrique et transitive, on déduit que $(uRz) \wedge (zRy)$ et de la transitivité de R on déduit que uRy, par suite $u \in \dot{y}$, ce qui montre que $\dot{x} \subset \dot{y}$.

De la même manière, on montre que $\dot{y} \subset \dot{x}$, ce qui termine la preuve de la propriété.

De cette propriété on déduit que :

$$E/R \text{ est une partition de l'ensemble } E.$$

1.8.2 Relations d'ordre

Définition 21 *On dit qu'une relation binaire R sur E est une relation d'ordre si elle est Réflexive, Transitive et Anti-Symétrique.*

Dans la littérature, les relations d'ordre sont souvent notées $\leq$.

Si $x \leq y$, on dit que x est inférieur ou égal à y ou que y est supérieur ou égal à x. On dit aussi que x est plus petit (ou égal) que y et y est plus grand (ou égal) que x.

Définition 22 *Soit $\leq$ une relation d'ordre sur un ensemble E.*

1. On dit que deux éléments x et y de E sont comparables si :

$$x \leq y \text{ ou } y \leq x$$

2. On dit que $\leq$ est une relation d'ordre total, ou que E est totalement ordonné par $\leq$, si tous les éléments de E sont deux à deux comparables. Si non, on dit que la relation $\leq$ est une relation d'ordre partiel ou que E est partiellement ordonné par $\leq$.

Exemple 23 *Il facile de voir que la relation binaire $\leq$ est une relation d'ordre sur $\mathbb{R}$, ce qui peut justifier la designation d'une relation d'ordre quelconque par $\leq$*

Exemple 24 *Etant donné E un ensemble non vide, alors l'egalité est une relation d'ordre dans E*

Il est evident que Si E n'est pas un singleton, L'egalité est une relation d'ordre partiel dans E

Exemple 25 *Soit F un ensemble et $E = P(F)$. On considère, sur $E = P(F)$, la relation binaire $\subset$, alors :*

I) $\subset$ est une relation d'ordre sur E.
1. $\subset$ est Réflexive, car pour tout ensemble $A \in P(A)$, on a $A \subset A$.
2. $\subset$ est Transitive, car pour tous $A, B, C \in P(A)$,

$$\begin{aligned}(A \subset B) \wedge (B \subset C) &\Rightarrow \forall x \; (x \in A) \Rightarrow (x \in B) \wedge (x \in B) \Rightarrow (x \in C) \\ &\Rightarrow \forall x \;\; (x \in A) \Rightarrow (x \in C) \qquad (\text{car} \Rightarrow \text{est transitive}) \\ &\Rightarrow (A \subset C).\end{aligned}$$

3. $\subset$ est Anti-symétrique, car pour tous $A, B \in P(A)$,

$$(A \subset B) \wedge (B \subset A) \Leftrightarrow A = B$$

De 1), 2) et 3) on déduit que $\subset$ est une relation d'ordre sur E.
II) L'ordre est-il total ?
i) Si $F = \emptyset$, alors $E = \{\emptyset\}$ et on a : $\forall A, B \in E,\ A = B = \emptyset$, donc

$$\forall A, B \in E,\ A \subset B$$

ce qui montre que l'ordre est Total.
ii) Si F est un signgleton, alors il existe a tel que $F = \{a\}$ et $E = \{\emptyset, \{a\}\}$, donc pour tous A et B dans E on a

$$((A = \emptyset) \vee (A = \{a\}) \wedge (B = \emptyset) \vee (B = \{a\}))$$

donc

$$\forall A, B \in E,\ (A \subset B) \vee (B \subset A)$$

ce qui montre que l'ordre est Total.
iii) Si F contient au moins deux éléments distincts a et b, alors

$$\exists A = \{a\}, B = \{b\} \in E; (A \not\subseteq B) \wedge (B \not\subseteq A)$$

donc A et B ne sont pas comparables, par suite $\subset$ est une relation d'ordre partiel dans E.

3.2.1 Plus petit, Plus grand élément

Définition 23 *Soit $(E, \leq)$ un ensemble ordonné et $A \in P(E)$.*

1. On dit que $m \in A$ est le plus petit élément de A si $\forall y \in A$ $(m \leq y)$
2. On dit que $M \in A$ est le plus grand élément de A si $\forall y \in A$ $(y \leq M)$

Exemple 26 *Dans $\mathbb{N}^*$ on définit la relation $|$ (divise)par :*

$$\forall n, m \in \mathbb{N}^*,\ n|m \Leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{N}; m = k.n)$$

I. Montrer que $|$ est une relation d'ordre.

i) $|$ est une relation Reflexive, car : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \exists k = 1 \in \mathbb{N}; n = k.n$ donc $\forall n \in \mathbb{N}, n|n$

ii) $|$ est une relation Anti-Symétrique, car :

$\forall n, m \in \mathbb{N}^*, (n|m) \wedge (m|n) \Leftrightarrow \exists k_1 \in \mathbb{N}; m = k_1.n \wedge \exists k_2 \in \mathbb{N}; n = k_2.m$

$\Rightarrow (\exists k_1 \in \mathbb{N}; m = k_1.n) \wedge (\exists k_2 \in \mathbb{N}; n = k_2.m) \wedge (m = k_1k_2.m)$

$\Rightarrow (\exists k_1 \in \mathbb{N}; m = k_1.n) \wedge (\exists k_2 \in \mathbb{N}; n = k_2.m) \wedge (k_1k_2 = 1)$ car $m \neq 0$

$\Rightarrow m = n$, car $\forall k_1, k_2 \in \mathbb{N}$, $(k_1k_2 = 1 \Rightarrow k_1 = k_2 = 1)$

donc

$$\forall n, m \in \mathbb{N}^*, n|m \wedge m|n \Rightarrow m = n$$

ce qui montre que $|$ est Anti-symétrique.

iii) $|$ est une relation Transitive, car : $\forall n, m, p \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}(n|m) \wedge (m|p) &\Leftrightarrow \exists k_1 \in \mathbb{N}; m = k_1.n \wedge \exists k_2 \in \mathbb{N}; p = k_2.m \\ &\Rightarrow \exists k = k_1k_2 \in \mathbb{N}; p = k.n \\ &\Rightarrow n|p\end{aligned}$$

ce qui montre que $|$ est Transitive.

De i) , ii) et iii) , on déduit que $|$ est une relation d'ordre.

II. L'ordre est-il total ?

L'ordre est partiel, car si on considére $n = 2$ et $m = 3$, alors n et m ne sont pas comparables.

III. Pour cette relation d'ordre, $\mathbb{N}^*$ a-t-il un plus petit élément ou un plus grand élément ?

i) Il est clair que 1 est le plus petit élément de $\mathbb{N}^*$, car $\forall n \in \mathbb{N}^*, \exists k = n \in \mathbb{N}; n = k.1$ donc $\forall n \in \mathbb{N}^*, 1|n$

ii) $\mathbb{N}^*$ n'a pas de plus grand élément, car : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \exists m = 2.n \in \mathbb{N}^*; n|m$

IV. Soient $A = \{20, 18, 14, 10, 6, 2\}$ et $B = \{2, 3, 6, 7, 42\}$, donner le plus petit et le plus grand élément respectivement de A et de B s'ils existent.

a) 2 est le plus petit élément de A, car il divise tous les autres éléments de A, donc : $\forall n \in A, 2|n$

b) A n'a pas de plus grand élément, car il n'y a pas dans A un élément qui est divisible par tous les autres éléments de A.

c) B n'a pas de plus petit élément, car il n'y a pas dans B un élément qui divise tous les autres éléments de B.

d) 42 est le plus grand élément de B, car tous les éléments de B divisent 42, donc $\forall n \in B, n|42$.

V. Pour cette relation d'ordre, $\mathbb{N}^*\backslash\{1\}$ a-t-il un plus petit élément ?

$\mathbb{N}^*\backslash\{1\}$ n'a pas de plus petit élément, car pour tout $n \in \mathbb{N}^*\backslash\{1\}$:

- Si n est pair alors il n'est pas divisible par les nombres impairs différents de 1, donc il n'est pas plus petit que ces nombres, par suite n n'est pas le plus petit élément de $\mathbb{N}^*\backslash\{1\}$.
- Si n est impair alors il n'est pas divisible par les nombres pairs, donc il n'est pas plus petit que ces nombres, par suite n n'est pas le plus petit élément de $\mathbb{N}^*\backslash\{1\}$,

Ce qui montre que $\mathbb{N}^*\backslash\{1\}$ n'admet pas de plus petit élément par rapport à la relation d'ordre $|$.

Proposition 21 *Soit $(E, \leq)$ un ensemble ordonné et $A \in P(A)$ alors si A possède un plus petit ou un plus grand élément, il est unique.*

Preuve : Soient m et $m\prime$ deux éléments de A, alors :

$$(m \text{ plus petit élément de } A) \wedge (m' \text{ plus petit élément de } A) \Longrightarrow ((m \leq m^{'}) \wedge (m' \leq m)) \\ \Longrightarrow m = m^{'}$$

d'où l'unicité du plus petit élément de A, s'il existe.

Le même type de raisonnement nous montre l'unicité du plus grand élément de A, s'il existe.

1.8.3 Eléments Minimaux et éléments maximaux

Définition 24 *Soit $(E, \leq)$ un ensemble ordonné et $A \in P(E)$.*

1. On dit qu'un élément $m \in A$ est un élément minimal dans A s'il n'y a pas dans A un élément plus petit que lui. Ceci est formellement équivalent à :

$$\forall y \in A \ (y \leq m \Rightarrow y = m)$$

2. On dit qu'un élément $M \in A$ est un élément maximal dans A s'il n'y a pas dans A un élément plus grand que lui. Ceci est formellement équivalent à :

$$\forall y \in A \ (M \leq y \Rightarrow y = M)$$

Exemple 27 *On reprend la relation inclusion et*

$A = \{\{1, 2, 3\}, \{0, 4\}, \{1, 3, 5\}, \{1, 5\}, \{1, 3\}, \{5, 3\}, \{0, 5, 6, 7\}\}$,
alors
1. Les éléments minimaux de A sont : $\{0, 4\}, \{1, 5\}, \{1, 3\}, \{5, 3\}$ et $\{0, 5, 6, 7\}$
2. Les éléments maximaux de A sont : $\{0, 4\}, \{1, 2, 3\}, \{1, 3, 5\}$ et $\{0, 5, 6, 7\}$.
3. A n'a pas de plus petit élément.
4. A n'a pas de plus grand élément.

Proposition 22 *Soit $(E, \leq)$ un ensemble ordonné et $m, M \in E$, alors*

1. m plus petit élément de A $\Rightarrow$ m est le seul élément minimal dans A.
2. M plus grand élément de $A \Rightarrow M$ est le seul élément maximal dans A.

Preuve : Immédiate.

Problème 23 *A-t-on les réciproques de ces propriétés ?*

1.8.4 Borne Inférieure, Borne Supérieure

Définition 25 *Soit $(E, \leq)$ un ensemble ordonné, A une partie de E.*

– On appelle minorant de l'ensemble A, tout élément $m \in E$ tel que $\forall x \in A$, $m \leq x$
– On appelle majorant de l'ensemble A, tout élément $M \in E$ tel que $\forall x \in A$, $x \leq M$
– Le plus grand des minorants, s'il existe, est appelé borne inférieure de A et noté $infA$.
– Le plus petit des majorants, s'il existe, est appelé borne supérieure de A et noté $supA$.
– Si A possède un minorant, on dit que A est minoré,
– Si A possède un majorrant, on dit que A est majoré,
– Si A possède un minorant et un majorrant, on dit que A est borné.

1. Le plus petit (respectivement le plus grand) élément de A, s'il existe, est un minorant (respectivement un majorant) de A. Par contre, un minorant (respectivement un majorant) de A peut ne pas être le plus petit (respectivement le plus grand) élément de A, car il n'est pas nécessairement dans A.
2. Si la borne inférieure ou la borne supérieure d'un ensemble A existe, alors elle est unique.
3. Si E est totalement ordonné par $\leq$, alors tout sous ensemble fini A de E admet un plus petit élément et un plus grand élément.

Exemple 28 *Soient $F = \{1, a, 2, 5, \gamma\}$, l'ensemble $E = P(F)$ ordonné par la relation $\subset$ et une partie $A = \{\{a, 2\}, \{2, 5, \gamma\}, \{1, 2, \gamma\}, \{a, 2, 5\}\}$, alors :*

1. Les mimorants de A sont : $\emptyset$ et $\{2\}$.
2. $InfA = \{2\}$.
3. A n'a pas de plus petit élément, car $InfA \notin A$.
4. Le seul majorant de A est : $F = \{1, a, 2, 5, \gamma\}$.
5. $SupA = F$.
6. A n'a pas de plus grand élément, car $SupA \notin A$.

Proposition 24 *Soient $(E, \leq)$ un ensemble totalement ordonné[7] et A et B deux sous ensembles de E dont les bornes inférieures et supérieures existent, alors :*

7. On a supposé que l'ordre est total pour assurer l'existence de $max\{supA, supB\}$, $min\{supA, supB\}$, $max\{infA, infB\}$ et de $min\{infA, infB\}$.

– $sup(A \cup B) = max\{supA, supB\}$
– $inf(A \cup B) = min\{infA, infB\}$
– $sup(A \cap B) \leq min\{supA, supB\}$
– $inf(A \cap B) \geq max\{infA, infB\}$

Preuve : Soient $M = max\{supA, supB\}$ et $m = min\{infA, infB\}$, alors :

$$\begin{array}{rcl} \forall x(x \in A \cup B) & \Rightarrow & (x \in A) \vee (x \in B)) \\ & \Rightarrow & (x \leq supA) \vee (x \leq supB) \\ & \Rightarrow & (x \leq M) \vee (x \leq M) \\ & \Rightarrow & (x \leq M) \end{array}$$

ce qui montre que M est un majorant de $A \cup B$.
Montrons que M est le plus petit des majorants de $A \cup B$. Soit M' un majorant de $A \cup B$, il est évident que M' est alors un majorant de A et de B, donc

$$(supA \leq M') \wedge (\sup B \leq M')$$

par suite

$$max\{supA, supB\} \leq M'$$

d'où on déduit que : $M = sup(A \cup B)$.
Les preuves des autres propriétés se font de la même facon.
Remarque 6.2 La seule relation d'ordre et d'équivalence, à la fois, est la relation égalité.

1.9 Combinatoire et Dénombrement

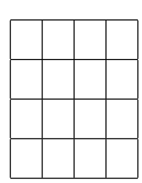
Dans tout ce qui suit, nous noterons $n!$ le produit $1 \times 2 \times 3 \times ... \times n$, ce produit s'appelle "factorielle n". On convient que $0! = 1$.

1.9.1 Principes de base du dénombrement

Principe de la somme

Si des ensembles $A_1, A_2, ..., A_p$ constituent une partition d'un ensemble fini E, alors :
$Card(A_1) + Card(A_2) + ... + Card(A_p) = Card(E)$

Exemple 29 *Combien y a-t-il de carrés dont les côtés sont matérialisés sur la figure ci-contre ?*



Soit E l'ensemble de tous les carrés. Notons A_1, A_2, A_3 et A_4 l'ensemble de ces carrés ayant pour côtés respectifs $1, 2, 3$ et 4 carreaux. Les sous ensembles A_1, A_2, A_3 et A_4 constituent une partition de E (puisqu'ils n'ont aucun élément en commun et que leur réunion est E).

D'après le principe de la somme, On a :

$Card(E) = Card(A_1) + Card(A_2) + Card(A_3) + Card(A_4) = 16 + 9 + 4 + 1 = 30.$

Il y a donc, au total 30 carrés dont les côtés sont matérialisés sur la figure ci-contre.

Proposition 25 *Si A et B sont deux parties d'un ensemble fini E, alors :*

1) Si A et B sont disjoints alors : $Card(A \cup B) = Card(A) + Card(B)$

2) $Card(\overline{A}) = Card(E) - Card(A)$

3) $Card(A \cup B) = Card(A) + Card(B) - Card(A \cap B)$

Démonstration :

1) Les ensembles A et B constituent une partition de l'ensemble $A \cup B$.Donc d'après le principe de la somme on bien le résultat.

2) Les ensembles $\overline{A}$ et A constituent une partition de l'ensemble E, donc en vertu encore du principe de la somme on a $Card(\overline{A}) + Card(A) = Card(E)$.

3) Notons $B \backslash A$ l'ensemble des éléments de B qui ne sont pas dans A et $A \backslash B$, l'ensemble des éléments de A qui ne sont pas dans B.

Remarquons que $B \backslash A = B \backslash (A \cap B)$ (c'est-à-dire $B \backslash A$ est le complémentaire de $A \cap B$ dans B), donc d'après 2) $Card(B \backslash A) = Card(B) - Card(A \cap B)$. De même, $Card(A \backslash B) = Card(A) - Card(A \cap B)$. Enfin, remarquons que $B \backslash A$, $A \backslash B$ et $A \cap B$ constituent une partition de $A \cup B$, donc $Card(A \cup B) = Card(B) - Card(A \cap B) + Card(A) - Card(A \cap B)$ $+Card(A \cap B)$ d'où le résultat.

Principe du produit (ou principe multiplicatif)

Si une situation comporte p étapes offrant respectivement $n_1, n_2, ..., n_p$ possibilités alors le nombre total d'issues est : $n_1 \times n_2 \times ... \times n_p$

C'est la règle utilisée lorsque nous dressons un arbre.

Il en découle le cardinal du produit cartésien :

Rappel : Si $E_1, E_2, ..., E_p$ sont p ensembles, $E_1 \times E_2 \times ... \times E_p$ représente le produit cartésien de $E_1, E_2, ..., E_p$

c'est-à-dire l'ensemble des p-uplets $(e_1, e_2, ..., e_p)$ où $e_1 \in E_1, e_2 \in E_2, ..., e_p \in E_p$.

Proposition 26 *Si $E_1, E_2, ..., E_p$ sont p ensembles de cardinal fini, alors :*

$Card(E_1 \times E_2 \times ... \times E_p) = Card(E_1) + Card(E_2) + ... + Card(E_p)$

- Un code comporte deux lettres distinctes suivies d'un chiffre non nul. Combien peut-on former de codes distincts ?

Les trois étapes : choix de la première lettre, de la deuxième, puis du chiffre offrent respectivement 26, 25 et 9 possibilités. Le nombre cherché est donc $26 \times 25 \times 9 = 5850$ codes distincts.

Tous les principes exposés ci-dessus étant intuitivement évident, nous ne préciserons pas nécessairement, par la suite, quand nous les utiliserons.

1.9.2 Dénombrement des p-listes

Définition 26 *Une p-liste (ou liste de longueur p) d'un ensemble E est un p-uplet d'éléments de E. C'est un élément du produit cartésien* $E^p = E \times ... \times E$ *(p fois).*

- $E = \{0; 1; 2; ...; 99\}$. Une 5-liste de E est par exemple $(21, 12, 12, 15, 98)$.
- $E = \{a; b; c; ...; z\}$. Le 6-uplet (a, n, a, n, a, s) est une 6-liste de E. En pratique, et lorsque la situation le permet, une p-liste est tout simplement notée ainsi : *ananas* .

Remarque 8 *:*

- On précise parfois p-liste "avec répétition" pour les distinguer des arrangements qui seront évoqués au paragraphe suivant.
- On suppose que la 0-liste existe, c'est la liste qui ne comporte aucun élément.

Soit E un ensemble de cardinal fini n. Le cardinal de l'ensemble E^P des p-listes de E est n^p .

La démonstration de ce théorème découle simplement du principe multiplicatif.

Applications :

1) Au loto sportif, on coche l'une des trois cases 1N2 pour chacun des 13 matches sélectionnés. Dénombrer le nombre de grilles distinctes.

Il y en a autant que de 13-listes de l'ensemble $\{1;\text{N}; 2\}$ soit $3^{13} = 1594323$.

2) Quel est le nombre d'applications d'un ensemble de cardinal p dans un ensemble de cardinal n ?

Il y a n^p aplications. En effet, pour chacun des p éléments de l'ensemble de départ, il y a n choix d'image dans l'ensemble d'arrivée.

1.9.3 Dénombrement des Arrangements et des Permutations

Définition 27 *Soit E un ensemble de cardinal fini n et p un entier naturel tel que* $0 \leq p \leq n$.

Un arrangement de p éléments de E est une p-liste d'éléments distincts de E.

Une permutation de E est un arrangement des n éléments de E.

Un arrangement est donc une p-liste dans laquelle il n'y a pas de répétitions.

- $E = \{a; b; c; ...; z\}$. Les listes suivantes : *beau* , *matin* , sont des arrangements de 4 et 5 éléments de E. Par contre, *arrangement* n'est pas un arrangement de 11 éléments de E car ses éléments ne sont pas distincts.
- Soit $E = \{s; u; c; r; e\}$. Les anagrammes du mot *sucre* sont des permutations de E.

Remarque 9 *une permutation de E correspond à une bijection de E.*

Proposition 27 *Soit E un ensemble fini de cardinal n et p un entier naturel tel que* $1 \leq p \leq n$.

- Le nombre d'arrangements de p éléments de E est :

$$A_n^p = n(n-1)...(n-p+1) = \frac{n!}{(n-p)!}$$

- Le nombre de permutations de E est : $A_n^n = n!$

Et par convention, le nombre d'arrangement de 0 éléments d'un ensemble E est $A_n^0 = 1$
La démonstration de ce théorème découle simplement du principe multiplicatif.

Remarque 10 *il y a donc $n!$ bijections d'un ensemble E de cardinal n dans lui même.*

Applications :

1) Le tiercé : une course de chevaux comporte 20 partants. Combien peut-il y avoir de résultats possibles de tiercés dans l'ordre ?

Soit E l'ensemble des numéros des chevaux. On a $Card(E) = 20$. Un tiercé correspond à un arrangement de 3 éléments de E, il y en a $A_{20}^3 = 6840$.

2) De combien de façons peut-on repartir 7 personnes sur 7 chaises ?

Désignons par$p_1, p_2, ..., p_7$ les 7 personnes et posons $E = \{p_1; p_2; ...; p_7\}$. Une répartition peut se voir comme un arrangement des 7 éléments de E c'est-à-dire une permutation de E, il y en a $7! = 5040$.

3) A_n^p est le nombre d'applications injectives d'un ensemble de cardinal p dans un ensemble de cardinal n. (n

choix d'image pour le premier élément, $n-1$ choix pour le second, etc..., $n-p+1$ choix pour le dernier).

$A_n^n = n!$ est le nombre le nombre de bijections d'un ensemble de cardinal n sur lui même.

1.9.4 Dénombrement des Combinaisons

Définition 28 *Soit E un ensemble fini de cardinal n et p un entier naturel tel que $0 \leq p \leq n$.*

Une combinaison de p éléments de E est une partie de E ayant p éléments.

$E = \{a; b; c\}$ et $p = 2$. Les combinaisons de deux éléments de E sont les parties : $\{a; b\}, \{a; c\} et \{b; c\}$.

Il est essentiel de noter que :

- Dans une partie, les éléments sont deux à deux distincts.
- Deux parties qui contiennent les mêmes éléments sont égales . Ainsi $\{a; b\} = \{b; a\}$. (L'ordre dans lequel on

écrit les éléments n'a pas d'importance)

Proposition 28 *Soit E un ensemble fini de cardinal n et p un entier naturel tel que $0 \leq p \leq n$.*

Le nombre de combinaisons de p éléments de E est :

$$C_n^p = \frac{A_n^p}{p!} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

Les coefficients C_n^p sont encore appelés coefficient binomiaux. (On verra pourquoi au paragraphe suivant)

Démonstration : Dénombrons les arrangements de p éléments d'un ensemble fini E de cardinal n. Un arrangement est caractérisé par :

- Le choix d'une partie de E à p éléments (C_n^p choix)

- La façon d'ordonner les p éléments de la partie choisie ($p!$ façons)

Le principe multiplicatif donne alors $A_n^p = C_n^p \times p!$ d'où le théorème.

Remarque 11 *Bien que les coefficients C_n^p soient donnés sous forme de fraction, ils sont bien des entiers : en effet l'entier $A_n^p = n(n-1)...(n-p+1)$ est le produit de p entiers consécutifs. Or, dans p entiers consécutifs, on en trouve toujours un qui est divisible par p, un autre divisible par $p-1$ etc ... donc A_n^p est divisible par $p!$.*

Interprétation importante

C_n^p représente le nombre de façons de choisir p objets parmi n (l'ordre n'important pas).

Applications :

1) Le loto : On tire au hasard 6 boules parmi 49. Combien de tirages possibles ? C'est le nombre de façons de choisir 6 objets parmi 49, soit $C_{49}^6 = 13983816$.

2) Nombre de comités de 3 personnes que l'on peut élire dans une assemblée de 20 personnes : c'est $C_{20}^3 = 1140$.

3) Tirages simultanés ou non ordonnés : une urne contient 10 boules numérotées $0, 1, ..., 10$. On en tire simultanément trois. Combien de tirages différents ? c'est $C_{10}^3 = 120$.

1.9.5 Propriétés des coefficients binomiaux

Proposition 29 *Symétrie*

Pour tout entier n et tout entier p tel que $0 \leq p \leq n$, on a : $C_n^p = C_n^{n-p}$

Démonstration : C_n^p représente le nombre parties de p éléments d'un ensemble E. Or, à chaque partie on peut associer de façon unique une autre partie : son complémentaire. Et le complémentaire d'une partie à p élément comporte $n-p$ éléments. Donc dénombrer les parties à p éléments revient à dénombrer les parties complémentaires à $n-p$ éléments et il y en a C_n^{n-p}.

Conséquences : $C_n^0 = C_n^n = 1$ et $C_n^1 = C_n^{n-1} = n$

Exemple 30 *le nombre de façons de choisir 2 délégués parmi 30 élèves est égal au nombre de façons de choisir 28 élèves non délégués parmi 30 : $C_{30}^2 = C_{30}^{28}$*

Proposition 30 *Relation (Triangle) de Pascal*

Pour tout entier n et tout entier p tel que $1 \leq p \leq n-1$, on a :

$$C_n^p = C_{n-1}^p + C_{n-1}^{p-1}$$

Démonstration ensembliste : Soit E un ensemble de cardinal fini n avec $n \geq 2$. Soit a un élément fixé de E.

Remarquons que les parties à p éléments de E se partagent en deux catégories :
- celles ne contenant pas a (il y en a C_{n-1}^p : choix de p éléments parmi $n-1$)
- celles contenant a (au nombre de C_{n-1}^{p-1} : choix de $p-1$ éléments parmi $n-1$)

Étant en présence d'une partition, le principe de la somme nous livre alors le résultat.

Démonstration algébrique :

$C_{n-1}^p + C_{n-1}^{p-1} = \frac{(n-1)!}{p!(n-1-p)!} + \frac{(n-1)!}{(p-1)!(n-p)!} = \frac{(n-1)!(n-p)}{p!(n-p)!} + \frac{(n-1)!p}{p!(n-p)!} = \frac{n!}{p!(n-p)!} = C_n^p$

La relation (Triangle) de Pascal permet de calculer les coefficients binomiaux de la façon suivante : pour trouver un certain coefficient, on additionne dans le tableau suivant les coefficients situés "juste au dessus" et "juste au dessus à gauche" entre eux :

$n=2$	1	2	1			
$n=3$	1	3	3	1		
$n=4$	1	4	6	4	1	
$n=5$	1	5	10	10	5	1

1.9.6 Formule du binôme de Newton

Pour tous nombres complexes a et b et tout entier naturel n non nul :

$$(a+b)^n = \sum_{p=0}^{n} C_n^p a^{n-p} b^p$$

Démonstration 1 de la formule du binôme :

En développant le produit $(a+b)^n = (a+b)(a+b)...(a+b)$, on obtient 2^n termes : en effet, dans chacun des n facteurs, on a deux choix possibles pour constituer chaque terme qui est une n-liste d'éléments de l'ensemble $\{a; b\}$ (nous n'utilisons pas ici la notation puissance). On peut répartir tous ces termes en fonction du nombre p de lettres b qu'ils contiennent $(0 \leq p \leq n)$. Les termes contenant p lettres b sont de la forme "$a^{n-p}b^p$" et il y en a C_n^p. Étant en présence d'une partition, le principe de la somme nous livre alors le résultat.

Démonstration 2 de la formule du binôme (On peut aussi faire la démonstation par récurrence) :

Exemple 31 *À l'aide de cette formule et du triangle de Pascal, on retrouve des relations très utiles :*

- Avec $n=2$ la formule donne : $(a+b)^2 = C_2^0 a^2 b^0 + C_1^1 a^1 b^1 + C_0^2 a^0 b^2 = a^2 + 2ab + b^2$
- Avec $n=3$ la formule donne : $(a+b)^3 = ... = a^3 + 3a^2 b + 3ab^2$+b^3
· Avec $n=4$ la formule donne : $(a+b)^4 = ... = a^4 + 4a^3 b + 6a^2 b^2 + 4ab^3 + b^4$.

Notons qu'il n'est pas inutile de savoir substituer (-b) à b dans la formule pour obtenir :

$$(a-b)^n = \sum_{p=0}^{n} C_n^p a^{n-p} (-b)^p = (a+b)^n = \sum_{p=0}^{n} (-1)^p C_n^p a^{n-p} b^p$$

En pratique, les signes obtenus en développant cette dernière formule alternent ; par exemple :

$$(a-b)^5 = a^5 - 5a^4 b + 10a^3 b^2 - 10a^2 b^3 + 5ab^4 - b^5.$$

Il est aussi utile de savoir utiliser la formule avec des valeurs particulières de a et b :

- Lorsque $a = b = 1$: $2^n = \sum\limits_{p=0}^{n} C_n^p = C_n^0 + C_n^1 + ... + C_n^n$
- Lorsque $a = 1$ et $b = x$: $(1+x)^n = \sum\limits_{p=0}^{n} C_n^p x^p = 1 + +C_n^1 x + ... + C_n^n x^n$
- Lorsque $a = 1$ et $b = -1$: $0 = \sum\limits_{p=0}^{n} C_n^p (-1)^p$

2) Applications

1) Nombre de parties d'un ensemble fini E de cardinal n :

Notons E_p l'ensemble des parties de E de cardinal p. Par définition, on a $Card(E_p) = C_n^p$. En outre les ensembles $E_0, E_1, ..., E_p, ..., E_n$ constituent une partition de l'ensemble $P(E)$. Donc, d'après le principe de la somme :

$Card(P(E)) = C_n^0 + C_n^1 + ... + C_n^n = 2^n$ (formule du binôme avec $a = b = 1$)

En conclusion, le nombre de parties d'un ensemble de cardinal n est 2^n .

2) Linéarisation de lignes trigonométriques (ceci facilitera leur intégration).

Exemple : $sin^3 x = (\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i})^3 = \frac{e^{3ix}-3e^{ix}+3e^{ix}-e^{-3ix}}{-8i} = -\frac{1}{4}\left(\frac{e^{3ix}-e^{-3ix}}{2i}\right) + \frac{3}{4}\left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right) = -\frac{1}{4}\sin(3x) + \frac{3}{4}\sin(x)$

3) Calcul de $cos(n\theta)$ et $sin(n\theta)$ en fonction de $cos\theta$ et $sin\theta$. (Formules de Moivre)