Université Ibn Tofail
Ecole Nationale des Sciences Appliquées
Kenitra-Maroc

Année universitaire 2018/2019
Cycle préparatoire, Semestre1
Module : Algèbre de base 1

Contrôle continu

Octobre 2018

Durée : 1H30

NB.
Il sera tenu en compte la clarté et la précision du raisonnement
Les documents, les calculatrices et les portables sont interdits

Exercice 1. On considère un ensemble E et $A, B, C \in \mathcal{P}(E)$.

Montrer l'équivalence

$$A \cup B \subset A \cup C \text{ et } A \cap B \subset A \cap C \iff B \subset C.$$

Exercice 2. On définit une relation binaire sur $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ par

$$\forall (a,b),(c,d) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*, \qquad (a,b)\mathcal{R}(c,d) \text{ si et seulement si } ad = bc.$$

(1) Montrer que c'est une relation d'équivalence.
(2) Décrire les classes d'équivalence.
(3) Que peut-on dire de l'ensemble quotient ?

Exercice 3. *Partie stable par une application*
Soit $f : E \to E$. Pour $n \in \mathbb{N}*$, on note $f^n = \underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{n \text{ fois}}$, et $f^0 = \mathrm{id}_E$.

Soit $A \subset E$, $A_n = f^n(A)$, et $B = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$.
(1) Montrer que $f(B) \subseteq B$.
(2) Montrer que B est la plus petite partie de E, au sens de l'inclusion, stable par f et contenant A.

Bon courage

Université Ibn Tofail
Ecole Nationale des Sciences Appliquées
Kenitra-Maroc

Année universitaire 2018/2019
Cycle préparatoire, Semestre1
Module : Algèbre de base 1
Janvier 2019

Contrôle final
Durée : 1H30

NB.
Il sera tenu en compte la clarté et la précision du raisonnement
Les documents, les calculatrices et les portables sont interdits

Exercice 1.

Soit $(G, *, e)$ un groupe. On note l'inverse de $a \in G$ par a^{-1}.

(a) On suppose que $(a * b)^{-1} = a^{-1} * b^{-1}$ pour tout $a, b \in G$. Démontrer que G est un groupe abélien.

(b) On suppose que $a^2 * b^2 = (a * b)^2$ pour tout $a, b \in G$. Démontrer que G est un groupe abélien.

(c) Supposons que $a^2 = e$ pour tout $a \in G$. Démontrer que G est un groupe abélien.
Indication : Vous pouvez utiliser (b).

(d) Démontrer que tout groupe de cardinal 4 est abélien.

Exercice 2.

Soit $\sigma \in \mathcal{S}_8$ et $\tau \in \mathcal{S}_7$ définis par

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 4 & 1 & 7 & 8 & 6 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

et

$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 6 & 4 & 7 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Décomposer σ et τ en produit de cycles disjoints, calculer leurs ordres.

(b) Calculer σ^{12} et τ^{201}.

Exercice 3.

Soit n un entier naturel.

1) Démontrer que pour tout entier n, $2n^2 + n + 1$ n'est pas divisible par 3.

2) Montrer que:
$2^{2n} + 2^n + 1$ est divisible par 7 si et seulement si n n'est pas un multiple de 3.

<u>Bon courage</u>