Université Ibn Tofail
Ecole Nationale des Sciences Appliquées
Kenitra-Maroc

Année universitaire 2017/2018
Cycle préparatoire, Semestre1
Module : Algèbre 1

Contrôle Continu

Octobre 2017

Durée : 1H30

NB.

Il sera tenu en compte la clarté et la précision du raisonnement
Les documents, les calculatrices et les portables sont interdits

Exercice 1.

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'applications de l'ensemble $\mathbb{N}$ dans lui-même. On définit une application f de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ en posant $f(n) = f_n(n) + 1$. Démontrer qu'il n'existe aucun $p \in \mathbb{N}$ tel que $f = f_p$.

Exercice 2.

Montrer que chacun des ensembles suivants est un intervalle, éventuellement vide ou réduit à un point

$$I_1 = \bigcap_{n=1}^{+\infty} \left[-\frac{1}{n}, 2+\frac{1}{n}\right[\quad \text{et} \quad I_2 = \bigcup_{n=1}^{+\infty} \left[1+\frac{1}{n}, n\right].$$

Exercice 3.

Soient X, Y deux ensembles et $f : X \to Y$ une application.

1. Rappeler la définition de l'image directe d'un sous-ensemble de X par f et la définition de l'image réciproque d'un sous-ensemble de Y par f.
2. Soient $A, B \subset X$, montrer que $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$, puis montrer que $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$ et donner un exemple où l'inclusion est stricte.
3. Montrer que f est injective si, et seulement si, pour toutes parties A, B de X, on a $f(A\cap B) = f(A) \cap f(B)$.
4. Montrer que f est bijective si, et seulement si, pour toutes parties A de X, on a $Y \setminus f(A) = f(X \setminus A)$.
5. Soient $A, B \subset Y$. Montrer que $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$, puis que $f^{-1}(Y \setminus A) = X \setminus f^{-1}(A)$.

Bon courage

Université Ibn Tofail
Ecole Nationale des Sciences Appliquées
Kenitra-Maroc

Année universitaire 2017/2018
Cycle préparatoire, Semestre
Module : Algèbre 1

Contrôle Final

Décembre 2017
Durée 1H30

NB.
Il sera tenu en compte la clarté et la précision du raisonnement
Les documents, les calculatrices et les portables sont interdits

Exercice 1.

1. Soit $(G, \star)$ un groupe. Soient H_1 et H_2 deux sous-groupes de G. Démontrer l'équivalence des deux assertions suivantes :
   (i) $H_1 \cup H_2$ est un sous-groupe de G.
   (ii) $H_1 \subseteq H_2$ ou $H_2 \subseteq H_1$.
2. Soit $(G, \star)$ un groupe.
   (a) Pour tout h dans G on définit
   $$\sigma_h : G \to G, \quad g \mapsto h \star g \star h^{-1}.$$
   Démontrer que, pour tout h dans G, l'application σ_h est un morphisme de groupes.
   (b) Démontrer que, pour tout $h \in G$, σ_h est un automorphisme de G (c'est-à-dire $\sigma_h \in \mathrm{Aut}(G)$) en donnant un inverse.
   (c) Démontrer que l'application
   $$\begin{array}{rccc} \varphi : & G & \to & \mathrm{Aut}(G) \\ & h & \mapsto & \sigma_h \end{array}$$
   est un morphisme de groupes.
   (d) Un automorphisme $\sigma : G \to G$ est dit *intérieur* s'il existe h dans G tel que, pour tout g dans G, on a $\sigma(g) = h \star g \star h^{-1}$ (c'est-à-dire $\sigma = \sigma_h$). On pose $\mathrm{Inn}(G) := \{\sigma \in \mathrm{Aut}(G) \mid \sigma \text{ est intérieur}\}$. Démontrer que $\mathrm{Inn}(G)$ est un sous-groupe de $\mathrm{Aut}(G)$.

Exercice 2.

Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$:
$n(n+1)(n+2)(n+3)$ est divisible par 24,
$n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)$ est divisible par 120.

Bon courage

Université Ibn Tofail
Ecole Nationale des Sciences Appliquées
Kenitra-Maroc

Année universitaire 2017/2018
Cycle préparatoire, Semestre
Module : Algèbre de base 1

Examen de rattrapage
Janvier 2018
Durée 1H15

NB.
Il sera tenu en compte la clarté et la précision du raisonnement
Les documents, les calculatrices et les portables sont interdits

Exercice 1.

On munit l'ensemble $G = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ de la loi de composition interne définie par

$$(m, n) \star (m', n') = (m + (-1)^n m', n + n').$$

(1) Montrer que $(G, \star)$ est un groupe (dont on précisera l'élément neutre et l'inverse de chaque élément). Ce groupe est-il commutatif?

(2) On considère les parties

$$H = \{(a, 0) \mid a \in \mathbb{Z}\} \text{ et } K = \{(0, b) \mid b \in \mathbb{Z}\}$$

de G. Montrer que H et K sont des sous-groupes et que chacun d'eux est isomorphe à $\mathbb{Z}$.

(3) Montrer que l'application $G \to \mathbb{Z}$ qui à (m, n) associe n est un homomorphisme de groupes.

Exercice 2.

Décomposer en cycles disjoints

(1) $a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 5 & 8 & 2 & 7 & 9 & 6 & 10 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$;

(2) $b = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 3 & 5 & 4 & 1 & 7 & 10 & 2 & 6 & 9 & 8 \end{pmatrix}$;

(3) Calculer a^{2005} et b^{100}.

Bon courage