Université Ibn Tofail
Ecole Nationale des Sciences Appliquées
Kenitra-Maroc

Année universitaire 2016/2017
Cycle préparatoire, Semestre
Mathématiques : Algèbre 1

Contrôle Continu
Durée 1H30

NB. *Les documents, les calculatrices et les portables sont interdits*

Exercice 1.

Soit E un ensemble. Montrer que pour toutes parties A, B et C de E :

$$\begin{cases} A \cup B = A \cup C \\ A \cap B = A \cap C \end{cases} \Longrightarrow B = C.$$

Exercice 2.

On définit sur $\mathbb{R}^2$ la relation $\mathcal{R}$ par

$$(x,y)\ \mathcal{R}\ (x',y') \Longleftrightarrow x - 5y' = x' - 5y.$$

Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.

2. Vérifier que la classe d'équivalence de $(0,0)$, que l'on notera $\mathcal{R}(0,0)$, est une droite $\mathcal{D}$ à préciser.
3. Vérifier que toute classe d'équivalence $\mathcal{R}(x,y)$ est une droite parallèle à $\mathcal{D}$.
4. Soit $f\ :\ \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par $f(x,y) = x + 5y$.
   4. 1. Montrer que $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(\mathcal{R}(x,y)) = x + 5y$.
   4. 2. Montrer que f est bijective de $\mathbb{R}^2/\mathcal{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Exercice 3.

Soient $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{Z}$ et $c \in \mathbb{Z}$.
Montrer que si b et c sont premiers entre eux, si b divise a et si c divise a, alors le produit bc divise a.

Exercice 4.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Quel est le $PGCD$ de $n^3 + n$ et $2n + 1$?
2. Montrer que $2^n + 1$ et $2^{n+1} + 1$ sont premiers entre eux.

Bon courage

Université Ibn Tofail
Ecole Nationale des Sciences Appliquées
Kenitra-Maroc

Année universitaire 2016/2017
Cycle préparatoire, Semestre
Module : Algèbre 1

Contrôle Final
Durée 1H30

NB.

Il sera tenu en compte la clarté et la précision du raisonnement
Les documents, les calculatrices et les portables sont interdits

Exercice 1.

Pour $a \in \mathbb{N}$, on note $a\mathbb{Z} = \{ak \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

(a) Montrer que $a\mathbb{Z}$ est un sous-groupe de $(\mathbb{Z}, +)$.
On se propose de montrer que, réciproquement, tout sous groupe de $\mathbb{Z}$ est de cette forme.

(b) Vérifier que le groupe $\{0\}$ est de la forme voulue.
Soit H un sous-groupe de $(\mathbb{Z}, +)$ non réduit à $\{0\}$.

(c) Montrer que $H^+ = \{h \in H \mid h > 0\}$ possède un plus petit élément. On note $a = \min H^+$.

(d) Établir que $a\mathbb{Z} \subset H$.

(e) En étudiant le reste de la division euclidienne d'un élément de H par a montrer que $H \subset a\mathbb{Z}$.

(f) Conclure que pour tout sous-groupe H de $\mathbb{Z}$, il existe un unique $a \in \mathbb{N}$ tel que $H = a\mathbb{Z}$.

Exercice 2.

Soit G un groupe noté multiplicativement.
Pour $a \in G$, on note τ_a l'application de G vers G définie par $\tau_a(x) = axa^{-1}$.
a) Montrer que τ_a est un morphisme du groupe $(G, \times)$ dans lui-même.
b) Vérifier que

$$\forall a, b \in G,\ \tau_a \circ \tau_b = \tau_{ab}$$

c) Montrer que τ_a est bijective et déterminer son application réciproque.
d) En déduire que $\mathcal{T} = \{\tau_a \mid a \in G\}$ muni du produit de composition est un groupe.

Bon courage

Université Ibn Tofail
Ecole Nationale des Sciences Appliquées
Kenitra-Maroc

Année universitaire 2016/2017
Cycle préparatoire, Semestre
Module : Algèbre 1

Examen de rattrapage
Durée 1H30

NB.

Il sera tenu en compte la clarté et la précision du raisonnement , les documents, les calculatrices et les portables sont interdits

Exercice 1.

Montrer que les lois suivantes munissent l'ensemble G indiqué d'une structure de groupe, et préciser s'il est abélien

(1) Sur $G =]-1, 1[$, la loi $\star$: $(x \star y) = \dfrac{x+y}{1+xy}$.
(2) Sur $G = \mathbb{R}^2$, la loi $\odot$: $(x, y) \odot (x', y') = (x + x', ye^{x'} + y'e^{x})$.

Exercice 2.

Soit $(G, \cdot)$ un groupe. Montrer que les ensembles suivants sont des sous-groupes de G.
(1) $Z(G) = \{x \in G | \forall y \in G, x \cdot y = y \cdot x\}$. ($Z(G)$ s'appelle le centre de G.)
(2) $aHa^{-1} = \{x \in G | \exists h \in H, x = a \cdot h \cdot a^{-1}\}$ avec H un sous-groupe de G.

Exercice 3.

Soit G un groupe noté multiplicativement.
Pour $a \in G$, on note τ_a l'application de G vers G définie par $\tau_a(x) = axa^{-1}$.
a) Montrer que τ_a est un morphisme du groupe $(G, \times)$ dans lui-même.
b) Vérifier que

$$\forall a, b \in G, \ \tau_a \circ \tau_b = \tau_{ab}$$

c) Montrer que τ_a est bijective et déterminer son application réciproque.
d) En déduire que $\mathcal{T} = \{\tau_a \mid a \in G\}$ muni du produit de composition est un groupe.

Bon courage