Université Ibn Tofail

Ecole Nationale des Sciences Appliquées

Kénitra-Maroc

Année universitaire 2015-2016

Contrôle continu d'algèbre I

Durée : 1h45min

Important :

Les documents, les calculatrices et les portables ne sont pas autorisés.

La clarté des raisonnements, la justification des passages et la bonne rédaction, constituent les éléments de la note.

Exercice 1. (Question de cours)

Démontrer le théorème suivant :

Théorème d'Euclide : *Il existe une infinité de nombre premiers.*

Exercice 2.

Soit $f : X \to Y$ une application.

a. Montrer que pour toute famille $(B_i)_{i\in I}$ de parties de Y,

$$f^{-1}\Big(\bigcup_{i\in I} B_i\Big) = \bigcup_{i\in I} f^{-1}(B_i), \qquad f^{-1}\Big(\bigcap_{i\in I} B_i\Big) = \bigcap_{i\in I} f^{-1}(B_i).$$

b. Montrer que pour toute famille $(A_i)_{i\in I}$ de parties de X. $\quad f(\bigcup_{i\in I} A_i) = \bigcup_{i\in I} f(A_i)$.

c. Montrer que si f est injective, $f(\bigcap_{i\in I} A_i) = \bigcap_{i\in I} f(A_i)$.

Exercice 3.

Soit X un ensemble. On appelle partition de X toute famille $(A_i)_{i\in I}$ de parties non vides de X, deux à deux disjointes, de réunion X. Etant donnée une partition de X, montrer que la relation $x\mathcal{R}y$ définie par :

$$x\mathcal{R}y \qquad \Longleftrightarrow \qquad \text{il existe } i \in I \text{ tel que } x \in A_i \text{ et } y \in A_i$$

est une relation d'équivalence sur X.

Exercice 4.

Soient E un ensemble et $(A, B, C) \in \mathcal{P}(E)^3$. On définit la différence symétrique de A et B, notée $A\Delta B$, par : $A\Delta B = (A \cup B)\setminus(A \cap B)$.

a) Montrer que : $A\Delta B = (A\setminus B) \cup (B\setminus A)$.

b) On suppose que $A\Delta B = A\Delta C$. Établir que $B = C$.

Bon courage

Université Ibn Tofail Kénitra
Ecole Nationale des Sciences Appliquées
S1 - Mathématiques/ Algèbre

2015-2016

Contrôle final d'algèbre 1
Durée 1H30min

NB : Sauf les stylos sont autorisés, la rédaction et la justification des passages comptent dans la notation.

Exercice 1 :

Soit $(G,.)$ le groupe d'ordre fini défini par $G = \{1, a, b, c, d, f\}$
où 1 est l'élément neutre de G.
1. Sachant que l'on a : $a^2 = 1$, $b^2 = 1$, $c = ab$, $d = ba$, $f = ca$ et $ca = bc$.
Trouver la table de la loi $\cdot$ sur G
(i.e calculer le composé $x.y$ pour chaque x et y dans G).
2. Le groupe G est-il commutatif? justifier.
3. En utilisant cette table, déterminer les inverses des éléments de G.

Exercice 2 :

1. Montrer que si p est un nombre premier et G un groupe d'ordre p, alors G est cyclique engendré par l'un quelconque de ses éléménts différents de e.
2. Soit G un groupe fini d'ordre pq, où p et q sont deux nombres premiers.
Montrer que tout sous-groupe propre de G est cyclique.
3. Montrer que tout sous-groupe d'un groupe cyclique est cyclique.

Exercice 3 :

Pour tout entier $n \geq 2$ on note F_n et G_n les polynômes suivants :

$$F_n = X^n - 1 \text{ et } G_n = X^{n-1} + X^{n-2} + ... + X + 1$$

1. Montrer que, pour tout $n \geq 2$; G_n divise F_n.
2. Montrer que si m divise n alors F_m divise F_n
3. Déduire des questions précédentes que si m divise n alors G_m divise G_n :
4. On suppose que m et n sont premiers entre eux et que $\alpha \in \mathbb{C}$ est une racine commune des polynômes F_m et F_n : Montrer que $\alpha = 1$
(Aide : Penser à utilise la relation de Bezout).

Bon courage

Université Ibn Tofail
Ecole Nationale des Sciences Appliquées
Kénitra-Maroc

Année universitaire 2015-2016

Examen de rattrapage: Algèbre I

Durée : 2H

Important : *Les documents autorisés : les calculatrices*

Exercice 1.

On définit sur $\mathbb{R}^2$ la loi $*$ par :

$$(x, y) * (x', y') = (x + x', ye^{x'} + y'e^{-x}).$$

1. Vérifier que cette loi est bien une loi de composition interne.
2. La loi est-elle associative ?
3. A t-on un élément neutre pour $*$?
4. $(\mathbb{R}^2, *)$ est-il un groupe ?
5. Si tel est le cas, préciser s'il est abélien.

Exercice 2.

Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 5, on considère les nombres

$$a_n = n^3 - n^2 - 12n \qquad \text{et} \qquad b_n = 2n^2 - 7n - 4.$$

1. Montrer, après factorisation, que les nombres a_n et b_n sont divisibles par $n - 4$.
2. Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 5, on pose $\alpha_n = 2n + 1$ et $\beta_n = n + 3$. On note d_n le PGCD de α_n et de β_n.
   (a) Établir une relation entre α_n et β_n indépendante de n.
   (b) Montrer que d_n divise 5.
   (c) Démontrer que les nombres α_n et β_n sont multiples de 5 si et seulement si $n - 2$ est multiple de 5.
3. Montrer que $2n + 1$ et n sont premiers entre eux.
4. (a) Déterminer, suivant les valeurs de n et en fonction de n, le PGCD de a_n et b_n. (On pourra utiliserles réusltatsdes questions 2.c et 3.)
   (b) Vérifier les réusltats obtenus dans les cas particuliers $n = 11$ et $n = 12$.

Exercice 3.

Soit $\sigma \in S_{10}$ la permutation définie par

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 2 & 4 & 5 & 7 & 6 & 3 & 1 & 10 & 9 & 8 \end{pmatrix}$$

1. Décomposer σ en un produit de cycles disjoints.
2. Décomposer σ en un produit de transpositions.
3. Déterminer la signature de σ.
4. Quel est l'ordre de σ ? Calculer σ^{145}.
5. Trouver l'inverse σ^{-1} de σ.

Bon courage