Université Ibn Tofail Kénitra
Ecole Nationale des Sciences Appliquées
S1 - Mathématiques, Algèbre

2013-2014

Contrôle continu
Durée: 1H30

– *La documentation, les calculatrices et les téléphones portables sont interdits*

Exercice 1 :(7pts : 2pts/1 ; 2pts/2 ; 1pt+1pt+1pt/3)

1. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel non nul n,

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

2. En calculant la différence $(k+1)^2 - k^2$, retrouver une démonstration du résultat précédent.
3. Calculer de même les sommes : $\sum_{k=1}^{n} k^2$, $\sum_{k=1}^{n} k^3$, et $\sum_{k=1}^{n} k^4$

Exercice 2 : (8pts : 1pt/1 ; 2pts/2 ; 1pt/a ; 1pt/b ; 2pts/c ; 1pt/4)
Soit $E = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$
On définit sur l'ensemble $E \times E$ la relation $\Re$ par :

$$(p,q)\Re(p_0,q_0) \Longleftrightarrow \begin{cases} p - p_0 \text{ est paire} \\ \quad et \\ q - q_0 \text{ est divisible par } 3 \end{cases}$$

Par exemple $(4,5)\Re(2,2)$ car $4-2$ est paire et $5-2$ est divisible par 3.

1. Donner le cardinal de $E \times E$.
2. Vérifier que $\Re$ est une relation d'équivalence
3. On désigne par $\overline{(p,q)}$ la classe d'équivalence de (p,q)
   a) Combien y-a il de classes d'équivalences différentes ? Donner leur liste
   b) Calculer le nombre d'éléments des classes suivantes :
   $\overline{(1,1)}$; $\overline{(1,2)}$; $\overline{(1,3)}$
   c) On considère l'application f définie par :

$$\begin{array}{rccc} f: & \overline{(1,q)} & \longrightarrow & \overline{(2,q)} \\ & (x,y) & \longrightarrow & f(x,y) = (x+1,y) \end{array}$$

   Montrer que f est une bijection
4. Déterminer le cardicanal de chaque classe d'équivalence, comparer le résultat avec celui de la question 1

Exercice 3 :(3pts : 2pts/1 ; 1pt/2)
On définit dans $\mathbb{N}^*$ la relation $\mathfrak{L}$ en posant pour tous $x, y \in \mathbb{N}^*$

$$x \mathfrak{L} y \Longleftrightarrow \exists n \in \mathbb{N}^*, \quad y = x^n$$

1. Montrer que $\mathfrak{L}$ est une relation d'ordre
2. L'ordre est-il total ?

Exercice 4 :(2pts)
Soit E un ensemble et $f : E \longrightarrow E$ une application telle que $f \circ f \circ f = f$
Montrer que f est injective si et seulement si f est surjective.

Université Ibn Tofail
Ecole Nationale des Sciences Appliquées
Kénitra-Maroc

2013/2014

Contrôle final d'algèbre 1
Janvier 2014
Durée : 1H30

- Les documents sont autorisés, les calculatrices et les portables non autorisés
- Tous les passages doivent êtres justifiés, il sera tenu compte de la clarté et la qualité de rédaction.

Exercice 1 *Soit G un groupe.*

1) Montrer que si $|G|$ est pair, alors G possède un élément d'ordre 2. (Considérer l'ensemble $E = \{x \in G / x \neq x^{-1}\}$).

2) Soit G un groupe non cyclique d'ordre 6 et a un élément de G d'ordre 2.

a) Montrer que si $b \in G$: $o(b) = 2$ et $ab = ba$, alors $b = a$. (Ind : considérer le sous-groupe $< a, b >$). ordre

b) Montrer que G possède un élément d'ordre 3. (Ind. soit $b \in G - \{a, b\}$. Montrer que si $o(b) = 2$ alors $o(ab) = 3$).

c) Dans la suite, on note c cet élément.

i) Montrer que $ac \neq ca$ et que $G = \{e, a, c, c^2, ac, ac^2\}$.

ii) En déduire que $ca = ac^2$ et que $G \simeq S_3$. (Ind. considérer la table de multiplication de G).

Exercice 2 *Soit A un anneau commutatif, I et J deux idéaux de A. On considère $(I : J) = \{a \in A : aJ \subset I\}$.*

1) Montrer que $(I : J)$ est un idéal de A contenant I.

2) Montrer que $(I : J)J \subset I$.

3) Montrer que si K est un idéal de A, alors $(I \cap J : K) = (I : K) \cap (J : K)$ et que $(I : J + K) = (I : J) \cap (I : K)$.